

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

LAURA GRANZIERA

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA ALOCAÇÃO DE RECURSOS EM
HORIZONTES DE LONGO PRAZO**

São Paulo – SP

2018

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

LAURA GRANZIERA

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA ALOCAÇÃO DE RECURSOS EM
HORIZONTES DE LONGO PRAZO**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do diploma em
Engenharia de Produção

São Paulo – SP

2018

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

LAURA GRANZIERA

**MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA ALOCAÇÃO DE RECURSOS EM
HORIZONTES DE LONGO PRAZO**

Trabalho de Formatura apresentado à
Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do diploma em
Engenharia de Produção

Orientadora: Prof. Dr. Celma de Oliveira
Ribeiro

São Paulo – SP

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

AGRADECIMENTOS

À minha família, meus companheiros e a todos com os quais compartilho a caminhada.

À orientação, paciência e aconselhamento da Professora Doutora Celma de Oliveira Ribeiro.

À compreensão, experiência e conhecimento dos profissionais da empresa onde realizei o programa de estágio, principalmente Ivo e Luciana.

À toda a experiência, vivência e crescimento proporcionados pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo através de seus professores, alunos e funcionários.

RESUMO

As decisões de alocação de recursos de longo prazo têm relação importante com a eficiência econômica, de forma que, pelo processo de seleção de projetos a serem financiados, determinadas iniciativas podem ser incentivadas ou desencorajadas. A fonte destes recursos pode ser, por exemplo, famílias, fundos de pensão, fundos soberanos e *endowments* de instituições sem fins lucrativos. Desta forma, o problema abordado refere-se ao estudo de métodos de otimização da construção de portfólios entre diferentes classes de ativos. As abordagens consideradas foram o modelo de Markowitz, o modelo de Michaud, um modelo de otimização robusta, o modelo de Rockafellar e Uryasev e um modelo de maximização da taxa de retorno. Cada um deles foi estudado, adaptado e implementado com o auxílio de programas de simulação computacional (Scilab). Os resultados são comparados em termos da relação entre risco e retorno e em termos de compatibilidade dos portfólios sugeridos com alocações reais de instituições financeiras. Por fim, concluiu-se que o resultado mais robusto em relação a variação de parâmetros iniciais e com maior aderência a situações reais de aplicação foi o modelo de Michaud.

Palavras-chave: otimização de portfólio, teoria de portfólio, classes de ativos, otimização robusta, processos estocásticos.

ABSTRACT

There is an important correlation between decisions on long-term resource allocation and economic efficiency. By selecting projects to be financed, it's possible to encourage or not certain initiative. Resources can come from families, pension funds, sovereign funds and endowments from non-profit institutions. This study aims to compare methods to build an optimum portfolio among different asset classes. Different models were used to approach the problem, including Markowitz model, Michaud model, a model using robust optimization, Rockafellar e Uryasev model and a model to maximize return. Each one of them was studied, adapted and implemented using computer simulation software (Scilab). The results were evaluated in terms of risk-return relation and similarity to real financial institution portfolios. It was found that Michaud model had the most robust results given the uncertainty asset classes long-term return.

Keywords: portfolio optimization, portfolio theory, asset classes, robust optimization, stochastic processes.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 Base de investidores de fundos nos EUA.....	22
Gráfico 2 Curvas de distribuição de probabilidade assimétricas.....	29
Gráfico 3 Representação do valor em risco.....	30
Gráfico 4 Correlação entre ações (S&P500) e crédito (S&P500 HY Corp Bond).....	33
Gráfico 5 Sensibilidade a variação de taxa de juros. Foram considerados pagamentos constantes e equidistantes com devolução do principal ao final do período de investimento..	37
Gráfico 6 Índice Shape de algumas classes de ativos.....	40
Gráfico 7 Plano de representação dos portfólios e da fronteira eficiente. Em classes de ativos individuais são mostrados os portfólios 100% alocados em apenas uma classe de ativos.....	41
Gráfico 8 Delimitações da Fronteira Eficiente	42
Gráfico 9 Seleção de portfólio baseado em nível máximo de risco	43
Gráfico 10 Seleção de portfólio com base em perfil de risco.....	44
Gráfico 11 Exemplo de função utilidade.....	45
Gráfico 12 Desempenho de portfólios considerados ótimos pelo modelo de Markowitz clássico para pequenas variações nos parâmetros de entrada. Os portfólios considerados representam portfólios eficientes de Markowitz para pequenas diferenças nos parâmetros de entrada	49
Gráfico 13 Perfil de risco do investidor.....	54
Gráfico 14 Agrupamento por nível de risco. Note que o ponto de máximo retorno da fronteira é utilizado no agrupamento com nível máximo de risco uut.	55
Gráfico 15 Índice Sharpe para as classes de ativos consideradas.....	73
Gráfico 16 Taxa de retorno e desvio-padrão das classes de ativos consideradas contra fronteira eficiente clássica de Markowitz.....	74
Gráfico 17 Papel de probabilidade normal aplicado aos elementos da amostra de cada classe de ativos.....	75
Gráfico 18 Variância como métrica de risco considerando o intervalo mínimo como um mês e o intervalo de otimização de alocação de 10 anos.....	76
Gráfico 19 Fronteira eficiente das soluções de Markowitz clássicas	78
Gráfico 20 Fronteiras eficientes a partir de diferentes modelos	79
Gráfico 21 Fronteiras eficientes para as soluções de Markowitz	81
Gráfico 22 Comparativo entre fronteiras eficientes	82

Gráfico 23 Fronteira eficiente para maximização do retorno e minimização da volatilidade .	83
Gráfico 24 Retorno e volatilidade em função de k	83
Gráfico 25 Desempenho de instituições de alocação de capital em intervalo de 10 anos contra a fronteira eficiente de Markowitz utilizada neste texto. Crédito é modelado pelo índice Bloomberg Barclay US Agg Bond e Ações é modelado pelo índice S&P500.	85
Gráfico 26 Alocação histórica entre classes de ativos do endowment de Yale	86
Gráfico 27 Portfólios ótimos para diferentes limites de risco obtidos através da resolução clássica de Markowitz.....	88
Gráfico 28 Alocações entre as classes de ativos para diferentes níveis de risco com o modelo de maximização da taxa de retorno	89
Gráfico 29 Alocação entre classes de ativos obtida através da abordagem de otimização robusta.....	91
Gráfico 30 Portfólios médios para diferentes níveis máximos de risco considerando a abordagem estocástica.....	91
Gráfico 31 Alocação entre as classes de ativos dos portfólios ótimos para modelo de minimização de Cvar	92
Gráfico 33 Alocações entre classes de ativos dos 5 maiores endowments dos EUA	111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Modelos de otimização de portfólio abordados neste texto.....	47
Tabela 2 Hipóteses consideradas pelas diferentes abordagens.....	63
Tabela 3 Classes de ativos	69
Tabela 4 Taxa de retorno e variância das classes de ativos.....	73
Tabela 5 Dispersão da correlação entre as classes de ativos em intervalos de 10 anos	77
Tabela 6 Alocação de recursos entre classes de ativos do endowment da Universidade de Yale.	86
Tabela 7 Verificação dos modelos de Markowitz	109

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Fluxo de entrada e saída de valores monetários no tempo.....	37
Figura 2 Algoritmo de simulação estocástica.....	53
Figura 3 Hipóteses adotadas na resolução dos modelos.....	62

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	21
1.1 Objetivo	22
1.2 Estrutura do trabalho.....	23
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1 Revisão bibliográfica	25
2.2 Conceitos básicos de composição de portfólio	26
2.2.1 Taxa de retorno de um investimento	26
2.2.2 Métricas de risco de um investimento.....	27
2.2.3 Modelos de composição dos portfólios de investimento	31
2.2.4 Métricas de risco e retorno para um portfólio	32
2.3 As decisões de investimento	35
2.3.1 Liquidez de um ativo.....	35
2.3.2 Duração de um ativo	36
2.3.3 Classes de ativos.....	38
2.3.4 Índice sharpe para ativos de um portfólio	39
2.3.5 Fronteira eficiente de alocação.....	40
2.3.6 Risco de alocação do investidor	42
2.3.7 Ajustes na alocação dos portfólios	45
2.4 Modelos de composição de portfólio	46
2.4.1 Minimização da variância	47
2.4.2 Minimização do Valor Condisional em Risco	47
2.4.3 Maximização da taxa de retorno	48
2.4.4 Incerteza nos parâmetros	48
3 OS MODELOS DE INTERESSE	51
3.1 O modelo de Markowitz	51
3.2 O modelo de Michaud.....	52
3.3 Modelo de otimização robusta	57
3.4 O modelo de Rockafellar e Uryasev	58
3.5 Modelo de maximização de retorno.....	60
3.6 A abordagem utilizada	62
3.6.1 A abordagem em relação ao retorno	63
3.6.2 A abordagem em relação à métrica de risco	64

3.6.3 A abordagem em relação à correlação entre as classes de ativos	65
4 RESULTADOS OBTIDOS	67
4.1 A determinação dos parâmetros	67
4.1.1 A delimitação das classes de ativos consideradas	67
4.1.2 O cálculo dos parâmetros.....	70
4.1.3 As restrições lineares	72
4.2 Os dados utilizados.....	73
4.3 Hipóteses adotadas	74
4.3.1 Normalidade das taxas de retorno.....	75
4.3.2 Dispersão de variância	75
4.3.3 A estrutura da correlação	76
4.4 Comparação dos modelos.....	77
4.4.1 Aplicação de técnicas de verificação das simulações.....	77
4.4.2 Análise das fronteiras de eficiência	79
4.4.3 Análise comparativa com alocações reais	84
5 CONCLUSÃO	93
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	95
APÊNDICE A	99
A.1 Solução de sistema de equações Lineares	99
A.2 Solução de Programação Quadrática.....	99
A.3 Solução de Programação Cvar.....	100
A.4 Solução de Programação Quadrática Estocástica.....	101
A.5 Tratamento Estatístico Programação Quadrática Estocástica	102
A.6 Solução programação robusta LMI	103
APÊNDICE B	105
B.1 Estimador coerente	105
B.2 Convexidade da função objetivo	105
B.3 Condições de KKT	105
B.4 Geração de valores aleatórios para distribuição normal multivariada.....	106
B.5 Linearização utilizando o complemento de Schur.....	107
B.6 Aplicação de multiplicadores de Lagrange para a solução do modelo de Markowitz para um caso particular	107
B.7 Breve descrição das classes de ativos consideradas pelo <i>endowment</i> de Yale e não abordadas no texto.....	108

APÊNDICE C	109
C.1 Validação Modelos Markowitz	109
C.2 Alocação dos portfólios de <i>endowments</i>	111

1 INTRODUÇÃO

Problemas relacionados a decisões de alocação de recursos estão presentes em diversas áreas da engenharia, com ampla aplicação em otimização de investimentos de empresas, governos e famílias. Os recursos para investimentos em uma economia são limitados, de forma que é necessário haver uma seleção dentre os projetos a fim de delimitar aqueles que efetivamente recebem financiamento (Souza, 1996). Assim, a maneira com que essa seleção é feita tem fundamental importância na eficiência da economia, determinando as atividades a serem prioritariamente desenvolvidas.

Os recursos para estes investimentos são muitas vezes provenientes de instituições que agrupam e gerem recursos de diferentes agentes. Uma forma de quantificar uma parcela deste mercado é através da base de investidores de fundos. Conforme visto no Gráfico 1, fundos de investimentos nos EUA têm fundações, *endowments* e fundos de pensão entre seus principais tipos de clientes. São aqui brevemente descritos os fundos de pensão, fundos soberanos, *endowments* e gestores de recursos de famílias:

(a) Fundos de pensão são criados por trabalhadores de grandes empresas com o foco na otimização de gestão de recursos para a aposentadoria dos contribuintes. Este é o caso, por exemplo, do Previ, formado pelos trabalhadores do Banco do Brasil, ou do Petros, formado pelos trabalhadores da Petrobras.

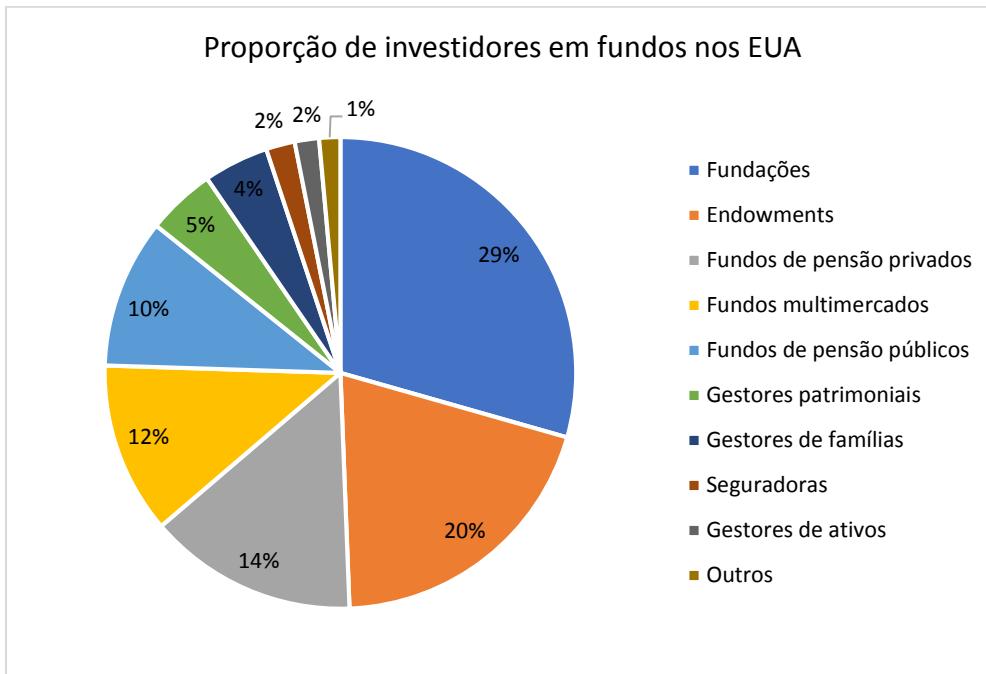
(b) Outra importante instituição de alocação de recursos são os fundos soberanos, que são instrumentos financeiros adotados pelo governo de alguns países para a administração de recursos provenientes tipicamente da venda de minérios e petróleo. Um dos mais relevantes é o da Noruega, com mais de 1 trilhão de dólares sob gestão. O Brasil havia criado um fundo semelhante em 2008, com o objetivo de suavizar o impacto de possíveis crises econômicas futuras. No entanto, em 2018 foi assinada uma medida provisória pela extinção do Fundo Soberano no Brasil (FSB) e uso dos recursos para equilíbrio das contas públicas.

(c) A alocação por *endowments* também é uma aplicação bastante relevante. *Endowments* são tipos de fundos patrimoniais, geralmente associados a entidades sem fins lucrativos, cujo objetivo é alocar recursos de forma eficiente para que seu retorno possa sustentar o funcionamento da instituição, no limite, até a perpetuidade. Este modelo é bastante utilizado por instituições de ensino principalmente nos EUA.

(d) As gestoras de famílias são estruturas montadas para administrar recursos de um número pequeno de famílias abastadas, com o objetivo de criar uma carteira personalizada de acordo com as necessidades individuais. Este trabalho de formatura foi desenvolvido junto a

um programa de estágio de um fundo de investimentos com esta estrutura, que tinha como objetivo principal ajudar famílias brasileiras a alocar recursos em gestores no exterior com uma visão prioritária de longo prazo.

Gráfico 1 Base de investidores de fundos nos EUA.



Fonte: Adaptado de Preqin Hedge Fund (2004)

Portanto, a otimização da alocação de recursos é importante para a eficiência da economia no geral, de forma a priorizar melhores projetos. Além disso, algumas instituições aqui exemplificadas também se beneficiam, como é o caso de fundos de pensão para trabalhadores de grandes instituições, fundos soberanos para administração de recursos governamentais, e fundos de *endowment* para financiamento de instituições de ensino.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo aplicar ferramental matemático e de pesquisa operacional para a análise de modelos aplicados à otimização da alocação de recursos.

Tradicionalmente a alocação é feita de maneira empírica, de forma que as informações sobre as perspectivas de comportamento de mercado definem a distribuição de recursos entre diferentes investimentos. O problema é que frequentemente essas visões alcançam apenas perspectivas de curto e médio prazo, resultando em alocações que podem ser bastante ineficientes sob a perspectiva de longo prazo.

A abordagem clássica para o problema é a aplicação do modelo de Markowitz. Sua ideia consiste em considerar não apenas as características individuais de cada investimento, mas a relação entre eles para a avaliação de um conjunto de alocações.

No entanto, este modelo já bastante consolidada na literatura apresenta aplicação bastante limitada na realidade, uma vez que o comportamento dos resultados se afasta de requisitos necessários na gestão de um portfólio de investimentos.

Desta forma, são analisados e adaptados alguns modelos alternativos propostos na literatura com o objetivo de identificar limitações e domínios de aplicação, auxiliando na seleção das abordagens consideradas compatíveis com os portfólios de investimento de longo prazo.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura deste trabalho segue uma sequência em que primeiro são definidos alguns conceitos básicos, para que posteriormente possam ser desenvolvidas os modelos e suas respectivas resoluções. Por fim, os resultados são avaliados através de uma comparação de desempenho e do confronto com alocações reais. Desta forma, pretende-se delimitar os domínios de aplicação de cada uma das abordagens. O trabalho se divide em capítulos, a saber:

Capítulo 1: introdução do trabalho de formatura e apresentação dos seus objetivos e suas motivações.

Capítulo 2: exposição de alguns conceitos básicos de fundamentação teórica, incluindo métricas de caracterização dos investimentos e do comportamento resultante de um conjunto de ativos.

Capítulo 3: exposição de possíveis abordagens com aplicação de técnicas de otimização de pesquisa operacional para a solução do problema. Critérios de amostragem também são definidos para a obtenção de um conjunto de dados a ser utilizado no cálculo dos parâmetros dos modelos. Ao final deste capítulo é desenvolvida a estrutura lógica das simulações computacionais que auxiliam na resolução.

Capítulo 4: comparação dos resultados dos modelos, envolvendo verificação e análise do desempenho das simulações e confronto com portfólios reais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é desenvolvido o embasamento teórico a ser utilizado posteriormente para a definição do problema de otimização de alocação de recursos em horizontes de longo prazo.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O artigo de Markowitz (1952) foi pioneiro na proposição de uma nova abordagem para a alocação eficiente de recursos considerando um conjunto de investimentos. Sharpe (1964) também contribuiu para esta corrente de pensamento. Ambos tinham como ideia principal a utilização de métricas que possibilassem a seleção de investimentos com base em critérios objetivos. Para isso utilizou-se a expectativa de retorno financeiro e risco associado à alocação, medidos através da média e da variância do conjunto histórico de preços. Estes trabalhos foram revisados por outros autores de forma que novas abordagens foram propostas na tentativa de ampliar o conjunto de aplicações possíveis. Alguns dos principais questionamentos foram sobre a definição de risco utilizada e sobre a consideração de risco e retorno determinísticos para cada investimento.

Roman e Mitra (2009) chamam estes desenvolvimentos tradicionais de Teorias Modernas do Portfólio. Posteriormente, com o desenvolvimento da capacidade de processamento computacional, novas abordagens, chamadas pelos autores de Pós-Modernas, foram propostas.

No contexto de questionamento da utilização da métrica de risco, a principal alternativa foi o modelo utilizado por Rockafellar e Uryasev (2000). A ideia é que não sejam consideradas dispersões de distribuição de retorno, mas a minimização da média de perdas acima de um determinado limite. A principal vantagem deste método está na possibilidade de aplicação em distribuições assimétricas, em que apesar da chance de perda ser pequena ela representa um valor significativo.

Além disso, no contexto de consideração de incerteza nos parâmetros de simulação, são observadas na literatura duas principais alternativas. Uma delas utiliza matemática robusta, como descrito por Fabozzi (2007) e por Costa e Paiva (2002), adaptando o método tradicional de seleção de alocações por Markowitz. Outra abordagem é a estocástica, como a mostrada por Michaud (1998), cujo objetivo é estudar a sensibilidade dos resultados de um conjunto de simulações de Markowitz a variações nos parâmetros.

O modelo de Black e Litterman (1992) pretende conciliar a métrica de risco histórico à visão dos gestores sobre riscos intrínsecos de investimentos. Esta abordagem se restringe ao estudo de um único ativo e não do comportamento resultante de um conjunto.

Por fim se destacam as abordagens de GARCH para determinação dos parâmetros de simulação, como as utilizadas por Ricetti (2013) e Jondeau (2006). Com isso é possível considerar conjuntos de retornos que se afastam de distribuições normais multivariadas.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE COMPOSIÇÃO DE PORTFÓLIO

Os fundamentos teóricos para a caracterização de um portfólio incluem métricas individuais e métricas relacionadas ao conjunto dos investimentos. Desta forma, nesta seção são destacados os principais conceitos utilizados na descrição do problema e das soluções abordadas.

2.2.1 Taxa de retorno de um investimento

O retorno de um investimento se caracteriza pelo montante resultado da aplicação de determinado recurso durante certo intervalo de tempo. Se uma aplicação inicial de um valor monetário V_o por um intervalo de tempo T resulta, ao final deste intervalo, em um valor $V_o + m$, tem-se que o retorno do investimento no intervalo T é m . No entanto, esta definição dificulta a comparação entre possíveis alocações com diferenças no montante inicial (V_o) ou no tempo de investimento (T). Desta maneira, se define a taxa de retorno (r), que independe do montante inicial ou do tempo de investimento.

Definição 1: a taxa de retorno (r) é a porcentagem de incremento de valor obtida em relação ao valor inicial de um investimento, considerando um intervalo de tempo fixo.

$$r = \left(\frac{V_o + m}{V_o} \right)^{1/T} - 1 = \left(\frac{V_f}{V_o} \right)^{1/T} - 1$$

Onde,

- r é a taxa de retorno da alocação;
- V_o é o valor monetário inicial de alocação;
- V_f é o valor monetário final de alocação;
- m é o incremento monetário obtido em virtude da alocação;
- T é o intervalo de tempo em que V_o ficou alocado medido na unidade de tempo fixa adotada.

A definição de retorno linear aqui adotada é uma simplificação do modelo logarítmico.

2.2.2 Métricas de risco de um investimento

O risco no âmbito de finanças pode ser definido em termos da variabilidade dos retornos observados em um investimento em relação à expectativa do investidor (Damodaran, 2008). Tal análise pode ser feita considerando as características intrínsecas de cada alocação, como fatores operacionais, de crédito, de liquidez, de mercado ou de legislação. Pode-se também medir o risco de um determinado investimento através do estudo de suas taxas de retorno históricas. Este texto se debruça apenas sobre esta última métrica.

Considerando, pois, apenas métricas que utilizam o conjunto histórico de taxas de retorno, ainda há formas diferentes de medir o risco de um investimento. Artzer (1999) estabelece princípios importantes para análise de estimadores de risco, relacionados a sua coerência (vide Apêndice B). Desta forma, o autor define risco como uma função que respeita as seguintes propriedades.

Sendo,

- $f(x)$ a função risco de um certo investimento;
- $r(x)$ a função retorno de um certo investimento;
- A um certo investimento;
- B um outro investimento diferente de A ;
- V_A valor inicial alocado em A ;
- V_B valor inicial alocado em B ;
- μ um escalar,

as seguintes propriedades se verificam para estimadores de risco coerentes.

(1) Subaditividade: a diversificação do portfólio reduz seu risco.

$$f(V_A, V_B) \leq f(V_A) + f(V_B)$$

(2) Monotonicidade: se os ganhos para um investimento A forem maiores que os ganhos para um investimento B para todos os cenários possíveis então o risco de A é maior que o risco de B .

$$r(V_A) \leq r(V_B) \Rightarrow f(V_A) \leq f(V_B)$$

(3) Homogeneidade de grau 1: o aumento da proporção de alocação em um certo investimento eleva seu risco na mesma proporção.

$$f(\mu V_A) = \mu f(V_A)$$

(4) Invariância por translação: o aumento da proporção de alocação em um certo investimento eleva seu risco na mesma quantidade

$$f(\mu + V_A) = \mu + f(V_A)$$

Definidas as características para uma métrica coerente de risco, são, então, descritos três estimadores que utilizam um conjunto de taxas de retorno históricas: variância (a), Var (b) e CVar (c).

(a) O estimador tradicionalmente empregado para quantificar o risco de um investimento é a variância de um conjunto histórico de retornos, chamado tipicamente de volatilidade. Considerando a aproximação do conjunto histórico de taxas de retorno por uma distribuição normal, pode-se calcular a variância esperada para o portfólio (Luenberger, 1997).

$$\hat{u}_\sigma = \sigma^2(r)$$

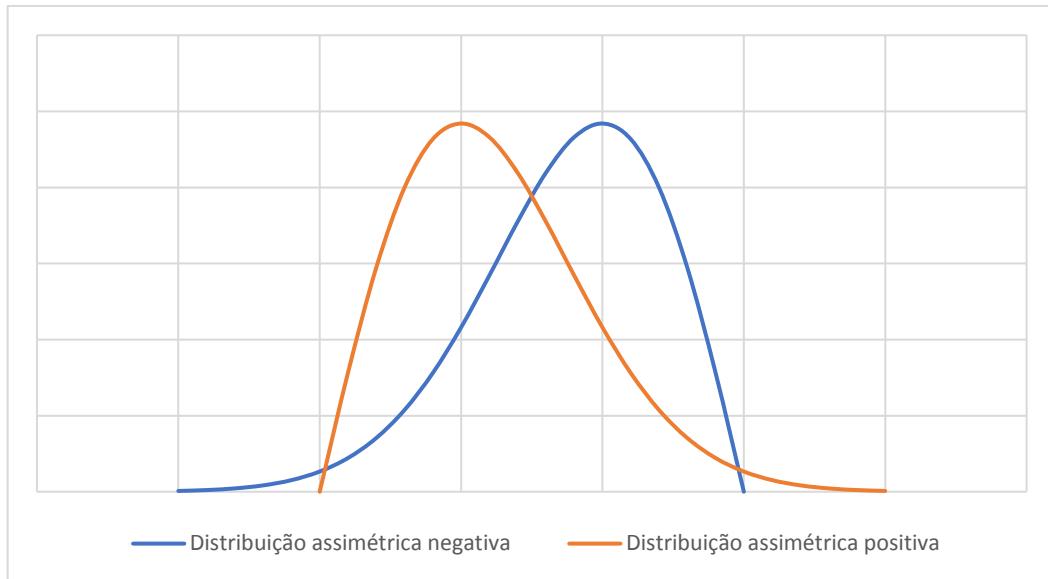
Em que:

- \hat{u}_σ é estimador de risco a partir da variância de taxas de retorno históricas;
- $\sigma^2(x)$ é a variância de x .

No entanto, com o avanço dos trabalhos nesta área, houve questionamento quanto à adoção desta métrica de risco. Segundo Wipplinger (2007), tal métrica considera a variação da taxa de retorno não apenas abaixo do valor esperado, mas também acima, penalizando ganhos superiores ao valor esperado. Desta forma, considera-se como risco ganhos acima da média histórica, o que tipicamente é vantajoso em uma alocação. Ainda segundo o autor, tal métrica suaviza o impacto da magnitude da cauda da distribuição, o que também prejudica a representação do risco do investimento.

Compare, por exemplo, as duas distribuições de probabilidades dos retornos mostradas no Gráfico 2. Ambas possuem a mesma variância, e, portanto, o mesmo risco através da métrica de volatilidade. No entanto, a curva assimétrica negativa poderia ser preferida pelo agente alocador, em função da limitação de ganhos e da maior dispersão de perdas abaixo da média.

Gráfico 2 Curvas de distribuição de probabilidade assimétricas



Fonte: Elaborado pela autora

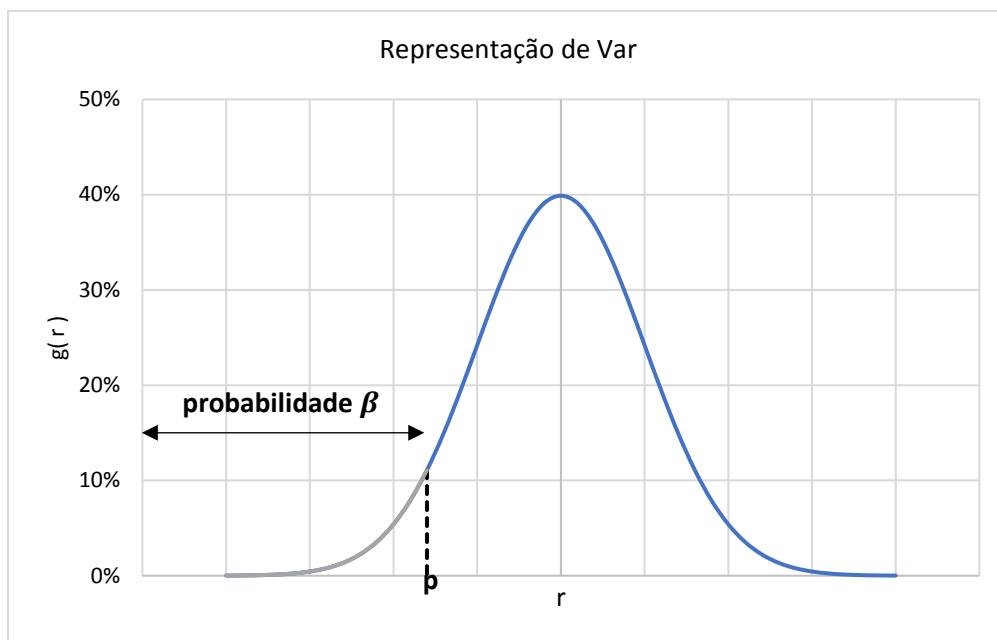
(b) Segundo Artzner (1999) o Valor em Risco, conhecido como Var em função da nomenclatura em língua inglesa (*Value at Risk*), surgiu como alternativa. Este estimador consiste na identificação da mínima taxa de retorno (perda máxima p) da distribuição de probabilidade dos retornos considerando um certo nível de confiança $(1 - \beta)$, conforme representado no Gráfico 3 e exibido na formulação a seguir.

$$\tau(r) = \int_{f(r) \leq p} g(r) dr$$

$$Var_\beta = \min\{r \mid \tau(r) \geq \beta\}$$

Onde,

- r é o retorno de um investimento;
- $g(r)$ é a distribuição de probabilidade de taxas de retorno de um dado investimento;
- $f(r)$ é a distribuição de probabilidade de taxas de retorno do investimento considerado;
- $\tau(r)$ é a distribuição de probabilidade acumulada das taxas de retorno para um dado investimento;
- β é o complementar do nível de confiança, representando a probabilidade de taxa de retorno menor que a perda máxima.

Gráfico 3 Representação do valor em risco

Fonte: Elaborado pela autora

No entanto, o Var é um estimador que não satisfaz as condições de coerência supracitadas. Além disso, há diversas críticas quanto a limitações de estimativa de tamanho de perda. É possível, por exemplo, que haja um cenário de perda bastante considerável, mas com uma baixa probabilidade, o que pode ter consequências graves para expectativa de taxa de retorno do investimento (PFlug, 2000).

(c) Desta forma, Rockafellar et al. (2000) utilizou outro estimador de risco, o Valor em Risco Condisional, conhecido como CVar em função da nomenclatura em língua inglesa (*Conditional Value at Risk*). Trata-se da média dos valores da distribuição de probabilidade considerando apenas taxas de retorno abaixo do valor em risco para um dado β , que pode ser formulado da seguinte maneira.

$$I_\beta = \frac{1}{\beta} \int_{f(r) \leq p(\beta)} f(r)g(r)dr$$

Onde,

- I_β é o Valor Condisional em Risco para um dado β .

Desta forma, foram exibidas diferentes formas de medição de risco de um único ativo. No entanto, para o estudo pretendido é necessário descrever nas subseções seguintes o comportamento resultante não de apenas um, mas de um conjunto de investimentos simultâneos.

2.2.3 Modelos de composição dos portfólios de investimento

Dado um valor monetário inicial disponível para investimento (M_o), pode-se decidir pela sua alocação entre diferentes ativos, dentro de um conjunto de N ativos. Os valores alocados em cada um desses ativos ($M_1, M_2, M_3, \dots, M_N$) formam um portfólio. Dessa forma, a caracterização da composição deste portfólio pode ser feita através da razão entre uma alocação específica (M_i) e valor monetário total alocado (M_o).

Definição 2: dados N investimentos, caracteriza-se a composição de um portfólio pelo vetor $w \in \mathbb{R}^N$ tal que cada um de seus elementos representa a proporção do valor monetário de um investimento em relação ao total do portfólio.

$$w_i = \frac{M_i}{M_o} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N$$

Onde,

- w_i é a proporção da alocação na estratégia i em relação ao valor total do portfólio;
- M_i é o valor monetário alocado na estratégia i ;
- M_o é o valor monetário total do portfólio;
- N é o número de ativos que constituem o portfólio.

Cada ativo possui características diferentes e respostas distintas a eventos e condições de mercado. Desta forma, através da combinação destes ativos, busca-se construir uma carteira cujo comportamento se adeque aos interesses e necessidades do investidor. Ou seja, além da consideração do comportamento das estratégias individualmente, considera-se o efeito da sua combinação em um portfólio.

Um portfólio pode ter alocações negativas ($w_i < 0$), o que resulta em uma taxa de retorno oposta ao observado na alocação positiva. Uma das maneiras de se fazer isso através do mercado de capitais é pela venda de um ativo alugado seguida de posterior recompra.

O somatório da proporção de todas as alocações é conhecido como *Exposição Líquida*, que constitui uma métrica que representa a porcentagem do montante total do portfólio que está diretamente relacionado com o mercado. Já o somatório do valor absoluto das proporções de todas as alocações é chamado de *Exposição Bruta*, ou seja, a proporção do valor do portfólio que efetivamente está alocado em alguma estratégia (Capelletto, 2007).

$$EL = \sum_{i=1}^N w_i \quad EB = \sum_{i=1}^N |w_i|$$

Onde,

- EL é a exposição líquida;
- EB é a exposição bruta.

2.2.4 Métricas de risco e retorno para um portfólio

Nas subsecções anteriores foram definidas métricas de risco e taxa de retorno para um ativo. Nesta subsecção, pretende-se expandir tais definições para o comportamento resultante de um portfólio de investimentos.

Considerando um portfólio, a taxa de retorno resultante é obtida pela média ponderada das taxas de retorno de cada uma das alocações, conforme descrito pela formulação a seguir.

$$r_p = \mathbf{w} \mathbf{r}'$$

Onde,

- $r_p \in \mathbb{R}$ é a taxa de retorno resultante do portfólio;
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor com as proporções de cada alocação;
- $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor com as taxas de retorno para cada alocação.

No entanto, no caso do risco resultante de um portfólio, não é suficiente a ponderação dos valores individuais para cada ativo. É necessário que se considere a dependência entre os conjuntos de taxa de retorno, o que pode ser feito através da correlação.

Desta forma, é importante verificar qual a relação esperada entre as taxas de retorno de cada um deles. Tipicamente, a métrica utilizada é o coeficiente de correlação linear, que mede o grau de relacionamento linear entre dados emparelhados de uma amostra.

Onde,

- ρ_{ij} é coeficiente de correlação linear entre as taxas de retorno dos investimentos i e j ;
- σ_{ij} é a covariância entre as taxas de retorno dos investimentos i e j .

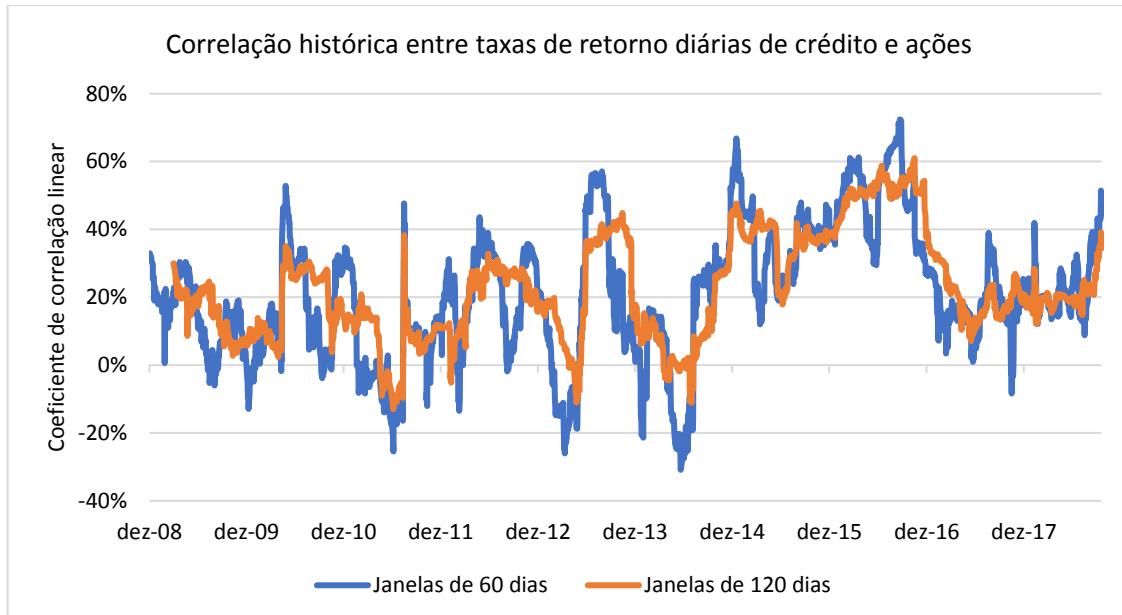
Considere, por exemplo, o caso hipotético de um portfólio que apresente investimentos em refinarias de petróleo e companhias aéreas. Com a elevação do preço do petróleo, há elevação da taxa de retorno das refinarias e redução da taxa de retorno das companhias aéreas. Neste caso, a correlação entre os dois ativos é negativa, de forma que a alocação em conjunto tende a reduzir os riscos em relação às alocações individuais. Desta forma, uma métrica importante é a correlação entre a taxa de retorno de refinarias e companhias aéreas, que indica uma proporção de alocação que pode reduzir a interferência do preço do petróleo no comportamento portfólio. Através do estudo de relações como estas, gestores de portfólio

conseguem se aproveitar das diferenças de comportamento dos ativos e reduzir o risco de um portfólio.

Ressalta-se, no entanto, que o coeficiente de correlação linear é uma métrica aproximada que nem sempre representa de forma aderente a relação entre taxas de retorno de dois investimentos. Um exemplo é o caso de ações e crédito, em que historicamente há momentos de alta correlação positiva e outros de correlação negativa. Esta diferença de comportamento pode ser explicada, em parte, pelo maior impacto da taxa de juros nos ativos de crédito, o que é menos evidente no caso de ações. No Gráfico 4 é mostrada a correlação de taxas de retorno diárias para ações e crédito nos EUA, considerando intervalos de 60 e 120 dias, tal que intervalos consecutivos divergem entre si de um dia. Desta forma, a utilização de correlação linear para descrever a relação entre ativos em casos como estes pode ser questionada.

No caso de as distribuições estudadas se afastarem do modelo de correlação linear, há várias abordagens alternativas. Entre elas Embrechts (2001) recomenda a utilização da Função de Copula para a representação de dependências mais gerais, não necessariamente lineares.

Gráfico 4 Correlação entre ações (S&P500) e crédito (S&P500 HY Corp Bond)



Fonte: Elaborado pela autora utilizando dados do terminal Bloomberg

Desta forma, esta relação entre os ativos pode ser usada para o cálculo do estimador de risco resultante do portfólio. Assim, as mesmas métricas descritas anteriormente para ativos individuais são agora retomadas para caracterizar o portfólio.

Definição 3: à variância de um conjunto histórico de taxas de retorno resultantes de um portfólio dá-se o nome de variância do portfólio.

$$\sigma_p^2 = \sigma^2(r_p) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{w}$$

Onde,

- r_p é a taxa de retorno resultante do portfólio;
- σ_p é o desvio padrão do portfólio;
- $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é a matriz de covariância, formada pela covariância entre os ativos, tal que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}.$$

Definição 4: o Valor em Risco de um portfólio consiste na mínima taxa de retorno (perda máxima p) da distribuição de probabilidade resultante de um conjunto de ativos dado um certo nível de confiança ($1 - \beta$).

$$\tau(\mathbf{w}, r_p) = \int_{f(\mathbf{w}, r_p) \leq p} g(r_p) dr_p$$

$$Var_\beta(\mathbf{w}) = \min\{r_p \mid \tau(\mathbf{w}, r_p) \geq \beta\}$$

Onde,

- r_p é a taxa de retorno resultante do portfólio;
- $g(r_p)$ é a distribuição de probabilidade de taxas de retorno de um dado portfólio \mathbf{w} ;
- $f(\mathbf{w}, r_p)$ é a distribuição de probabilidade de taxas de retorno em função da alocação;
- $\tau(\mathbf{w}, r_p)$ é a distribuição de probabilidade acumulada das taxas de retorno para um dado portfólio \mathbf{w} ;
- β é o complementar do nível de confiança, representando a probabilidade de taxa de retorno menor que a perda máxima;
- $Var_\beta(\mathbf{w})$ é o Valor em Risco para um nível de confiança ($1 - \beta$).

Definição 5: Valor em Risco Condisional de um portfólio é a média dos valores da distribuição de probabilidade das taxas de retorno resultantes do portfólio que se localizam abaixo do valor de risco para um dado β .

$$CVar_\beta(\mathbf{w}) = \frac{1}{\beta} \int_{f(\mathbf{w}, r_p) \leq p(\mathbf{w}, \beta)} f(\mathbf{w}, r_p) g(r_p) dr_p$$

Onde,

- $CVar_\beta(\mathbf{w})$ é CVar para um dado β e um portfólio com alocações \mathbf{w} .

2.3 AS DECISÕES DE INVESTIMENTO

Neste texto, optou-se pela aplicação da análise dos portfólios com ativos no mercado de capitais. Desta forma, nesta seção são definidos alguns parâmetros bastante utilizados no setor para a caracterização e agrupamento dos investimentos. Posteriormente são mostradas maneiras de descrever e comparar portfólios em termos de suas características de risco e expectativa de taxa de retorno.

2.3.1 Liquidez de um ativo

A liquidez de um ativo refere-se ao tempo necessário para a movimentação de recursos entre os investimentos diferentes. Esta característica, em muitos casos, depende de regras que limitam ou dificultam a alocação e o resgate de recursos em certos ativos.

Desta forma, investimentos que exigem menor intervalo de tempo são considerados mais líquidos. Por outro lado, investimentos que requerem um período maior de alocação são considerados menos líquidos. No limite, investimentos ilíquidos são aqueles em que não é possível o resgate da alocação antes da finalização do projeto, cujo prazo é geralmente longo.

Nos casos de investimentos ilíquidos as regras para devolução de recursos são consequência do período de desenvolvimento de certo projeto. Quando se opta por realizar a alocação, normalmente é firmado um compromisso no qual o recurso estará disponível quando necessário. Durante este período não se pode alocar em outros investimentos com muitas restrições de liquidez sob a pena de restrição da disponibilidade. Além disso, os projetos, em geral, requerem recursos gradualmente durante seu desenvolvimento, de forma que a disponibilidade deve seguir esta demanda. Isto é, a chamada de capital, nome dado a esta demanda de recursos, acompanha as necessidades do projeto.

A devolução de recursos no caso de investimentos ilíquidos também segue o andamento do projeto. Desta forma, não é possível realizar resgates conforme desejado, mas apenas conforme ocorre a remuneração do projeto.

Nos casos de investimentos líquidos, a estratégia também pode demandar certo tempo para o desenvolvimento, de forma que podem ser definidas regras para a alocação e o resgate de recursos. Quando se decide pelo investimento, primeiramente é feito um estudo para captação e avaliação de oportunidades. Selecionadas as alternativas, é necessário verificar se há possibilidade de alocação, uma vez que algumas estratégias não podem ser desenvolvidas com um volume muito grande de recursos. Um exemplo disso é o caso do investimento em

empresas pequenas, que geralmente têm uma capacidade limitada de absorção de recursos mantendo a taxa de retorno. Dessa forma, pode-se limitar o total de investimento em determinada estratégia, o que comumente prioriza os recursos dos agentes que já tem alocação.

Diferentemente dos ilíquidos, no caso de investimentos líquidos é possível realizar o resgate de recursos, sujeito a algumas restrições, uma vez que é necessário que haja agentes que queiram comprar, preferencialmente a um preço favorável. Pode ser delimitado um limite mínimo de tempo entre a alocação e o resgate, o que pode ser proibido ou penalizado por uma taxa. Também é comum a necessidade de aviso de resgate com certa antecedência, além da devolução em parcelas distribuídas no tempo. Ademais, há outros mecanismos que procuram incentivar a manutenção do investimento. Um exemplo é caso de cobrança proporcional à taxa de retorno apenas nos casos de aumento do valor do investimento além do máximo histórico desde o início da alocação. Dessa forma, quando a estratégia perde valor não há estímulo para resgate até sua recuperação.

2.3.2 Duração de um ativo

Outro critério utilizado para caracterizar ativos é a sensibilidade a variações da taxa de juros, o que pode ser medido através da duração de um investimento, conhecido em língua inglesa como *duration*. Desta forma, alocações de duração alta têm alteração mais significativa da taxa de retorno em razão de mudanças da taxa de juros. Já ativos que são menos afetados por alterações na taxa de juros têm uma duração mais baixa.

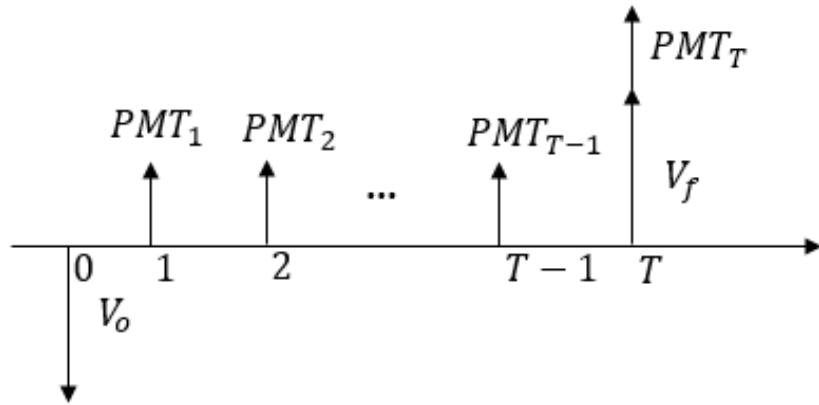
A duração consiste no tempo médio em que o recurso fica alocado. Este tempo, no entanto, não depende apenas do início e do final de um contrato de investimento, uma vez que há ativos em que ocorre o recebimento de valores monetários intermediários antes do final do contrato. Assim, a duração é utilizada como métrica que pondera o tempo em que o dinheiro está investido considerando estes pagamentos intermediários. A formulação utilizada neste texto é a de Macaulay (Cox, 1979), representada na Figura 1 e em equação a seguir.

$$MD = \frac{1}{V_o} \left(\sum_{i=1}^T \frac{i PMT_i}{(i + r)^i} + \frac{V_f}{(i + r)^i} \right)$$

Onde,

- MD é a duração de Macaulay;
- PMT_i é o pagamento intermediário que ocorre no instante i contido no intervalo T .

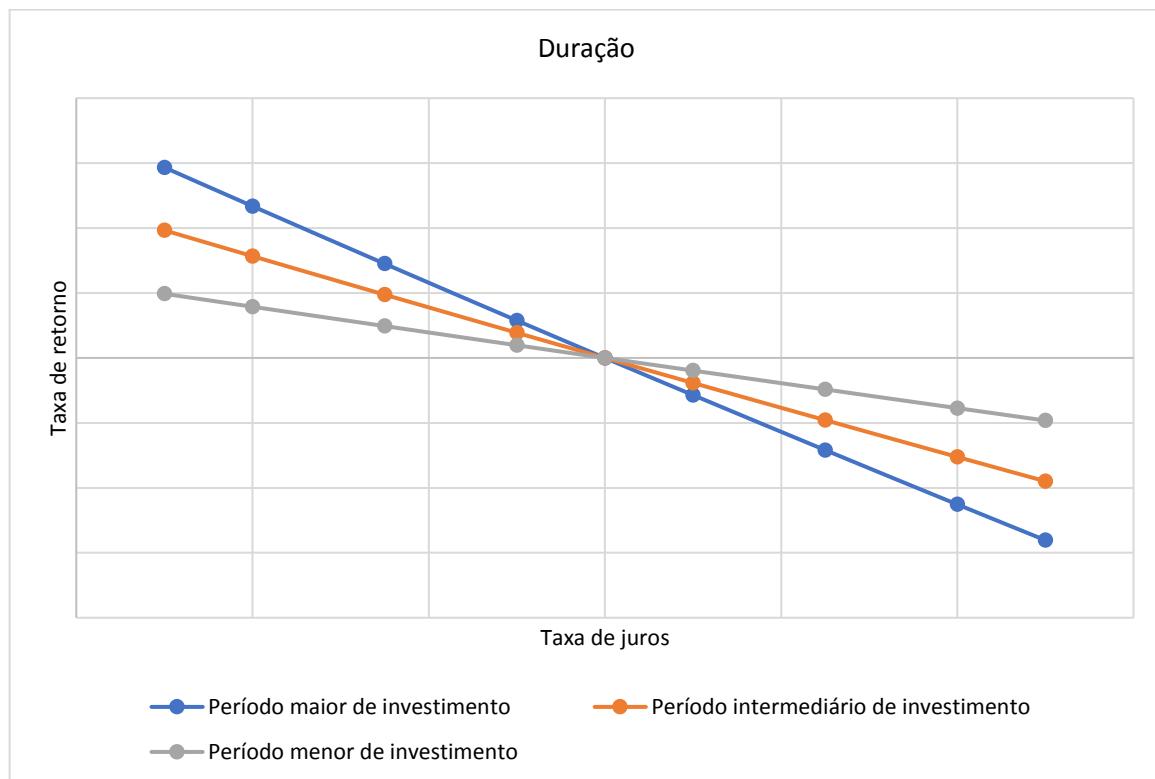
Figura 1 Fluxo de entrada e saída de valores monetários no tempo



Fonte: Elaborado pela autora

No Gráfico 5, foram considerados investimentos com mesmas taxas de retorno, mas com durações diferentes. É possível observar que sensibilidade destas alocações a alterações na taxa de juros depende da duração do ativo.

Gráfico 5 Sensibilidade a variação de taxa de juros. Foram considerados pagamentos constantes e equidistantes com devolução do principal ao final do período de investimento.



2.3.3 Classes de ativos

Uma das formas de construção de um portfólio é o agrupamento de alocações com expectativa de comportamento similar (Focardi, 2001). Dessa forma, ao invés de a decisão de alocação ser tomada para cada ativo individualmente, ela é tomada considerando conjuntos com características similares.

Os critérios de agrupamento utilizados neste texto e descritos a seguir são a expectativa de risco-retorno, a liquidez, a duração, a localização geográfica, a correlação com outras classes de ativos e o nível de responsabilização do investidor. Tais critérios são posteriormente aplicados para o mercado de capitais de forma a definir classes de ativos que serão consideradas na simulação.

(a) Um critério de agrupamento tipicamente utilizado é a expectativa de risco-retorno da alocação. Esta expectativa pode ser medida através de notas, chamadas de grau de investimento, as quais usualmente são atribuídas por agências especializadas, como Moody's, S&P e Fitch.

(b) A liquidez também pode ser utilizada como critério de agrupamento, de forma que investimentos com maior facilidade de alocação ou resgate são separados daqueles com maior dificuldade. No limite também são considerados investimentos ilíquidos, os quais não podem ser resgatados antes do final do projeto.

(c) Pode ser considerada a duração do investimento como critério de agrupamento. Desta forma, alocações com maior ou menor sensibilidade a variações de taxa de juros podem ser classificados em classes de ativos distintas.

(d) A localização geográfica também interfere no comportamento de um ativo. Investimentos em mercados emergentes são tipicamente sujeitos a fatores de risco diferentes daqueles presentes em mercados ditos desenvolvidos.

(e) A correlação com outras classes de ativos pode também ser utilizada para classificar investimentos. Um exemplo são ativos de crédito, que englobam tanto investimentos altamente correlacionados com o mercado acionário, como é o caso da emissão de dívida de empresas, quanto outros bastante descorrelacionados do mercado no geral, como é o caso de crédito para seguro de vida. Desta forma, é possível que haja interesse na separação destes dois grupos de ativos.

(f) Por fim, é comum a distinção de nível de responsabilização do investidor, que pode ser feita através da separação de ativos de crédito e ação. No caso da ação há propriedade de parcela da companhia e, portanto, maior nível de responsabilização sobre seu desempenho. Já

no caso de crédito, trata-se de um empréstimo à companhia, com menos responsabilidades e maior prioridade no recebimento dos pagamentos.

Além destes critérios utilizados neste texto, também é comum a classificação em relação à expectativa de comportamento do investimento frente às condições de mercado. A diferenciação entre classes de ativos também pode ser feita através da direção e a magnitude da resposta dos investimentos a mudanças como inflação, crescimento do PIB, preço do petróleo, câmbio, entre outros.

Consideradas estas classes de ativos, cabe ressaltar, no entanto, que há variações de comportamento entre cada um dos ativos que as compõem. Isto é, a consideração de um subconjunto de investimentos dentro de uma classe de ativos pode gerar diferença de comportamento no portfólio, chamada de dispersão. Desta forma, podem ser identificadas duas principais fontes de retorno de uma alocação: a distribuição entre as classes de ativos e a distribuição dentro de cada classe de ativos. À taxa de retorno da média dos elementos que compõe uma classe de ativos, que é normalmente estimada através de índices, atribui-se o nome de beta. Já ao retorno incremental resultante de uma seleção de investimentos dentro de uma classe de ativos dá-se o nome de alpha.

2.3.4 Índice sharpe para ativos de um portfólio

Uma das abordagens mais simples para a seleção de investimentos a comporem um portfólio é a consideração de estratégias com melhor relação entre risco e retorno, medidos através do Índice Sharpe. Trata-se da razão entre retorno excedente e volatilidade de um ativo para um determinado período (Sharpe, 1994), conforme formulação a seguir.

$$IS = \frac{r - r_f}{\sigma}$$

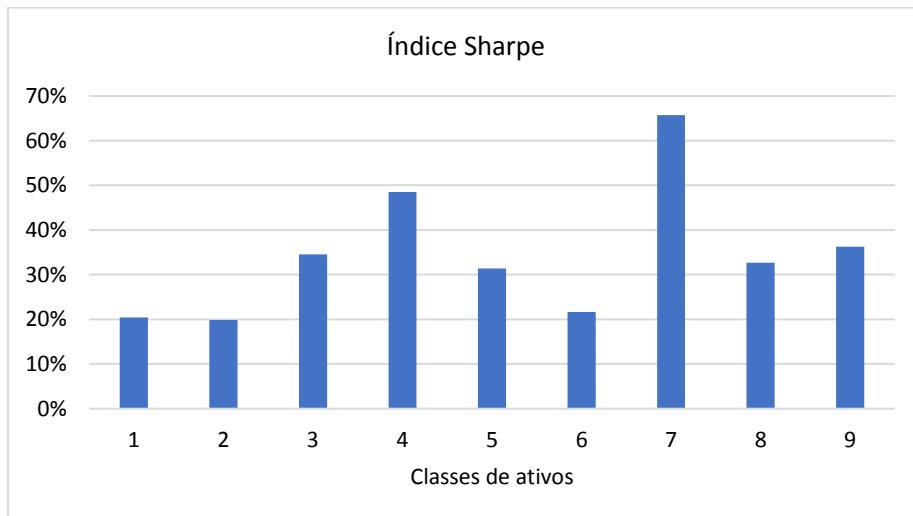
Onde,

- IS é o Índice Sharpe;
- r é a taxa de retorno esperada para o investimento;
- r_f é o retorno atribuído ao investimento considerado, no limite, livre de risco;
- σ é o desvio padrão das taxas de retorno históricas do investimento.

A ideia desta abordagem é calcular o Índice Sharpe de cada uma das classes de ativos consideradas. Este resultado, em tese, fornece uma relação de risco e retorno dos investimentos, de maneira que aqueles que apresentam maiores valores de Índice Sharpe são selecionados para

comporem o portfólio. No exemplo da Gráfico 6, as classes de ativos em que recursos seriam prioritariamente alocados seriam as indicadas pelos números 4 e 7.

Gráfico 6 Índice Shape de algumas classes de ativos



Fonte: Elaborado pela autora

No entanto, a utilização de tal critério apresenta limitações importantes em aplicações reais. Uma delas é que este método de construção de portfólio considera implicitamente que as taxas de retornos das diferentes classes de ativos são independentes, ignorando a possível correlação existente entre elas.

Além disso, a relação entre retorno excedente e volatilidade é suposta linear, o que não é necessariamente verdade. Ao adotar essa simplificação incorre-se no risco de priorizar inconscientemente classes de ativos com menor ou maior risco.

Dadas estas limitações, outro método de avaliação de portfólios foi considerado na subseção seguinte.

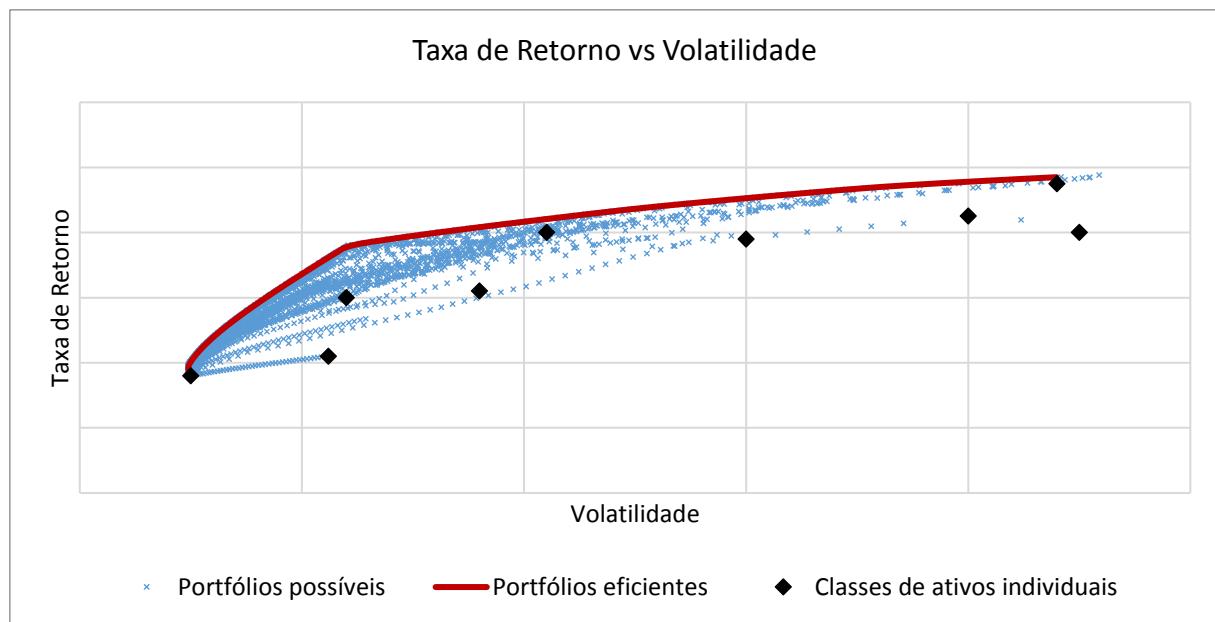
2.3.5 Fronteira eficiente de alocação

Como alternativa à abordagem anterior, portfólios podem ser representados em um plano formado por nível de risco na abcissa e taxa de retorno na ordenada. Considere um conjunto formado por todos os portfólios possíveis compostos por um grupo limitado de ativos (vide representação deste conjunto no plano retorno-risco no Gráfico 7). Considere agora um subconjunto destes portfólios formados por todos aqueles pontos que, para cada nível de volatilidade representam a maior taxa de retorno possível proveniente de combinações destes ativos. À curva formada pela representação dos portfólios deste subconjunto no plano retorno-

risco dá-se o nome de fronteira eficiente. Seu conceito já foi bastante explorado na literatura por apontar as potencialidades máximas da combinação de investimentos dentro de um portfólio.

O Gráfico 7 evidencia que as relações de risco retorno ótimas se afastam da hipótese linear considerada na adoção do índice Sharpe. Neste caso, portfólios com maior risco seriam prejudicados na análise, ainda que estejam bastante próximos da fronteira eficiente. Dessa forma, neste texto, optou-se pela utilização da fronteira eficiente como forma de representação das sugestões de alocação.

Gráfico 7 Plano de representação dos portfólios e da fronteira eficiente. Em classes de ativos individuais são mostrados os portfólios 100% alocados em apenas uma classe de ativos.



Fonte: Elaborado pela autora

A fronteira eficiente é delimitada inferiormente pelo ponto de mínimo risco e superiormente pelo ponto de máxima taxa de retorno, de forma que os intervalos considerados estão contidos em S , conforme descrito a seguir (vide Gráfico 8).

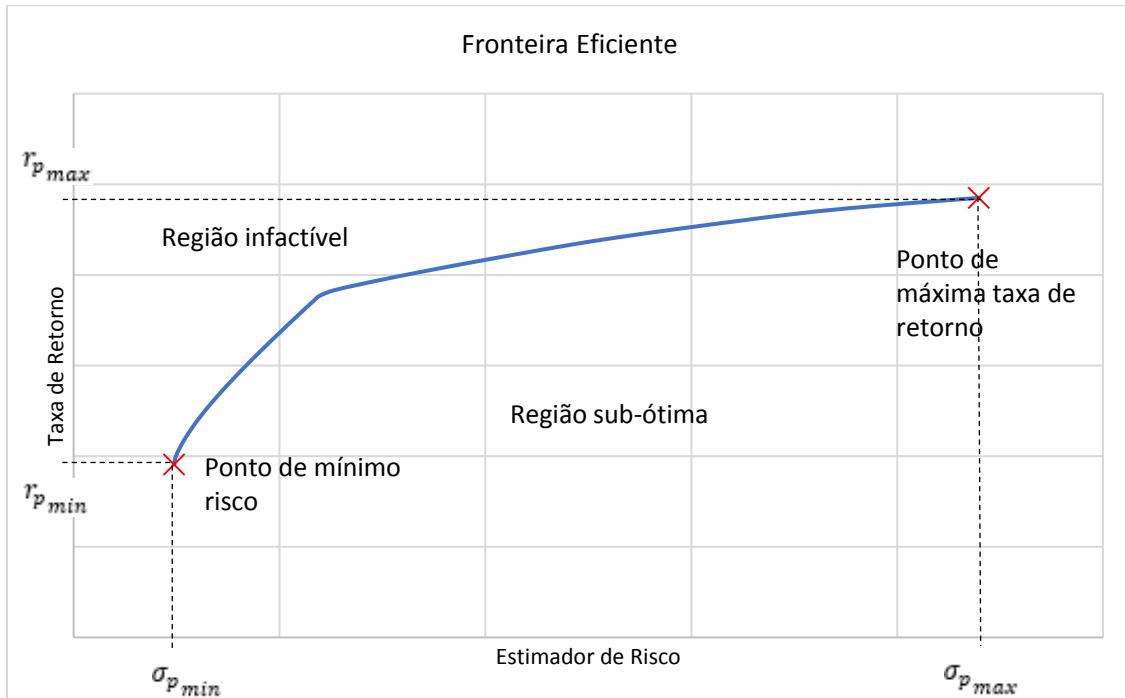
$$S = \{(X, Y) \mid X \in [\sigma_{p_{min}}; \sigma_{p_{max}}] \cap Y \in [r_{p_{min}}; r_{p_{max}}]\}$$

Onde,

- S é uma região delimitado pelos pontos de mínimo risco e máxima taxa de retorno em que a fronteira eficiente está contida;

- $(\sigma_{p_{min}}, r_{p_{min}})$ é o ponto de mínima volatilidade resultante do portfólio;

- $(\sigma_{p_{max}}, r_{p_{max}})$ é o ponto de máxima taxa de retorno resultante do portfólio.

Gráfico 8 Delimitações da Fronteira Eficiente

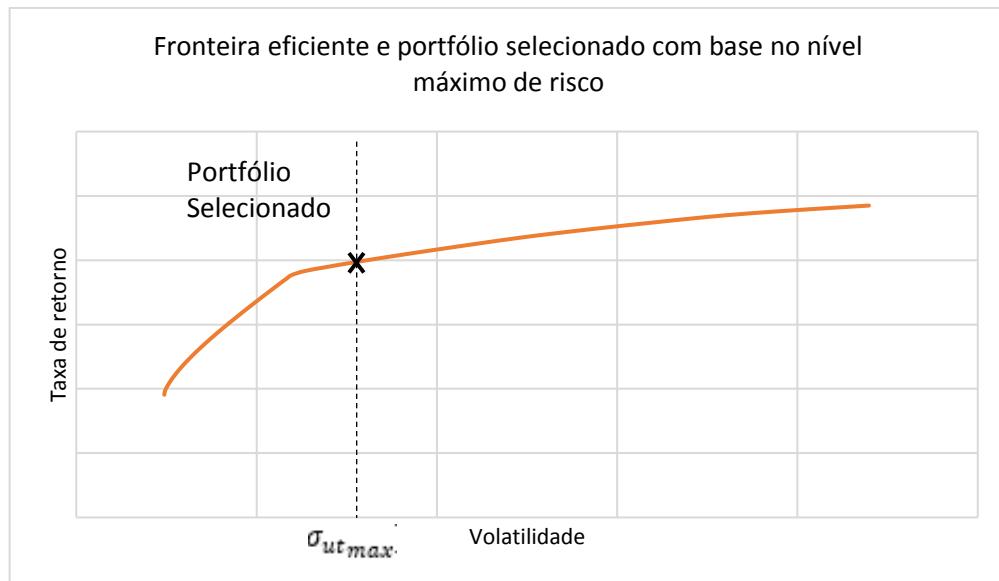
Fonte: Elaborado pela autora

A definição da fronteira eficiente, no entanto, ainda não é suficiente para a delimitação do portfólio a ser selecionado para determinado agente. Esta curva define apenas um conjunto de portfólios considerados eficientes, mas não a alocação específica a ser utilizada. Desta forma, na subseção seguinte são consideradas alternativas para a representar essa disposição do investidor em alocar recursos em risco.

2.3.6 Risco de alocação do investidor

São consideradas neste texto três alternativas para a incorporação da disposição a risco do investidor, sendo elas o nível de risco máximo (a), o perfil de risco (b) e a função utilidade (c).

(a) Uma das alternativas é a definição um nível máximo de risco ($\sigma_{ut_{max}}$) para o qual o agente está disposto a alocar recursos. Desta forma, o portfólio selecionado é aquele definido pela intersecção entre a fronteira eficiente e a vertical de volatilidade máxima pretendida (vide Gráfico 9).

Gráfico 9 Seleção de portfólio baseado em nível máximo de risco

Fonte: Elaborado pela autora

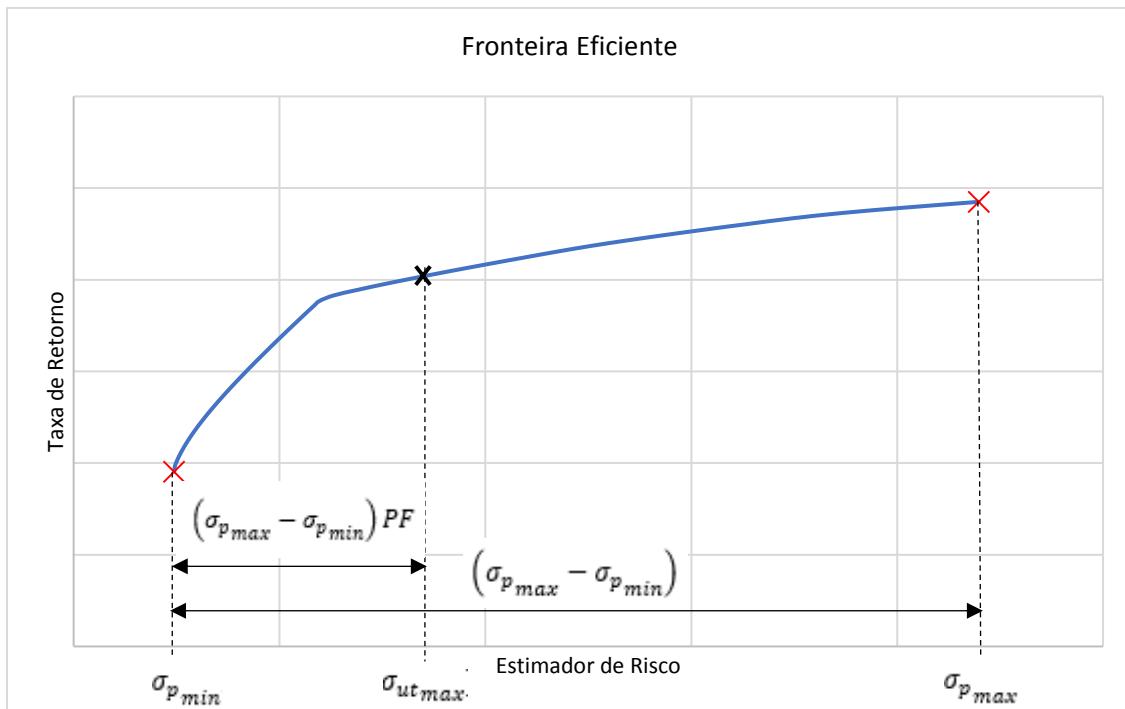
(b) Pode-se também utilizar o conceito de perfil de risco para representar a disposição do investidor a alocar recursos em risco. Neste caso, ao invés de determinar uma volatilidade máxima, define-se uma proporção entre os níveis de mínima e máxima volatilidade da fronteira eficiente na qual o investidor pretende localizar seu portfólio. Neste texto o conceito é tratado como a razão entre o nível de risco incremental máximo permitido pelo agente e nível de risco incremental máximo permitido pelo portfólio (vide Gráfico 10).

$$PF = \frac{\sigma_{ut max} - \sigma_{p min}}{\sigma_{p max} - \sigma_{p min}}$$

Onde:

- PF é o perfil de risco do investidor;
- $\sigma_{ut max}$ é o valor máximo que o estimador de risco pode alcançar mantendo a disposição de alocação de capital do agente.

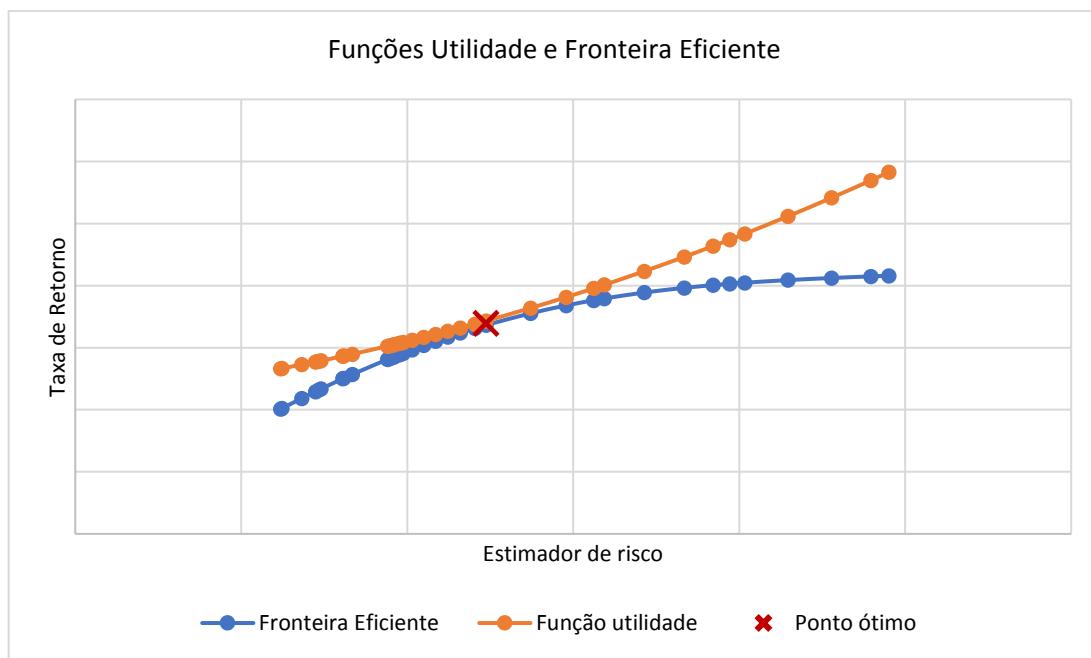
Considere, por exemplo, que um investidor tem o perfil de risco equivalente a 1/3. Isso quer dizer que o portfólio deste agente deve se localizar em um ponto contido na fronteira eficiente tal que sua volatilidade se distancia da volatilidade mínima em 1/3 da diferença de entre a abscissa do ponto máximo ($\sigma_{p max}$) e a abscissa do ponto mínimo ($\sigma_{p min}$) da fronteira.

Gráfico 10 Seleção de portfólio com base em perfil de risco

Fonte: Elaborado pela autora

(c) No entanto, em aplicações reais, é comum que a disposição do investidor em alocar recursos em risco seja melhor representada por uma função que leva em conta a expectativa de taxa de retorno e não apenas um nível ou perfil de risco fixos. Isto é, quanto maior a expectativa de retorno, maior também é a disposição a risco. Para isso, pode-se utilizar a Função Utilidade (Fabozzi, 2007), que determina o nível máximo de risco com base na taxa de retorno esperada. Desta forma, a intersecção entre a fronteira eficiente e a Função Utilidade determina o portfólio a ser selecionado (vide Gráfico 11).

Ainda segundo o autor, no caso de os conjuntos de retornos serem aproximados por distribuições normais, a intersecção da função utilidade e da fronteira eficiente coincide com o limite máximo de risco ($\sigma_{ut_{max}}$). Desta forma, se a hipótese de distribuição normal das taxas de retorno das classes de ativos for adotada, o problema se degenera ao caso (a).

Gráfico 11 Exemplo de função utilidade

Fonte: Elaborado pela autora

2.3.7 Ajustes na alocação dos portfólios

Os métodos descritos anteriormente buscam definir uma alocação ótima de recursos entre classes de ativos a ser mantida por um longo período de tempo. No entanto, em aplicações reais de gestores com verdadeira perspectiva de longo prazo há necessidade de pequenos ajustes das proporções das classes de ativos. Uma das razões é a necessidade de rebalanceamento do portfólio. Após determinado período, em geral anualmente, a alocação de classes de ativos que obtiveram maior retorno e naturalmente se tornaram maiores no portfólio é reduzida. Já as que tiveram pior desempenho têm alocação aumentada. A principal justificativa desta abordagem é proveniente da ideia que existe uma reversão à média histórica da taxa de retorno. Isto é, se um investimento gerou uma taxa de retorno acima do esperado em relação aos outros componentes do portfólio em certo período, seria prudente reduzir a alocação pois haveria uma tendência de piora do desempenho no período seguinte.

Outra razão é a incorporação da perspectiva qualitativa de médio prazo. É comum que algumas decisões de alocação, principalmente de classes de ativos líquidas, sejam influenciadas por perspectivas de médio prazo. Tais visões incluem aspectos complexos que dificilmente seriam abordados de maneira eficiente pelos modelos de longo prazo. Essas decisões, chamadas de táticas, são geralmente bastante influenciadas por posicionamentos qualitativos, como as

perspectivas macroeconômicas e a perspectiva de geração de alpha em determinada classe de ativos.

Desta forma, em aplicações reais é interessante considerar não apenas uma alocação ótima, mas um intervalo otimizado de distribuição de recursos, dentro do qual há certa mobilidade para absorver as necessidades supracitadas.

2.4 MODELOS DE COMPOSIÇÃO DE PORTFÓLIO

Na seção anterior adotou-se a fronteira eficiente para representação do risco de um investimento. No entanto, ainda não foram abordados métodos para o cálculo dos portfólios que a compõe. Assim, esta seção trata de diferentes ferramentas de otimização para a identificação de alocações ótimas.

Segundo Costa e Paiva (2002), as abordagens mais comuns são (i) a minimização do estimador de risco dado um limite mínimo de taxa de retorno e (ii) a maximização da taxa de retorno dado um limite máximo de estimador de risco.

$$(i) \quad \min_{\mathbf{w} \in W} u(\mathbf{w}) \quad (ii) \quad \max_{\mathbf{w} \in W} \mathbf{w}' \mathbf{r}$$

$$s.a. \quad \mathbf{w}' \mathbf{r} \geq rt_{min} \quad s.a. \quad u(\mathbf{w}) \leq rk_{max}$$

Onde,

- \mathbf{w} e \mathbf{r} foram definidos anteriormente nas subseções 2.2.3 e 2.2.1 respectivamente;
- W determina as restrições lineares de alocação nas classes de ativos;
- $u(\mathbf{w})$ é uma medida de risco de um portfólio \mathbf{w} ;
- rt_{min} é o retorno mínimo esperado para o portfólio;
- rk_{max} é o valor máximo esperado para a medida de risco $u(\mathbf{w})$.

Considerando estas duas abordagens associadas a diferentes medidas de risco recaímos em diferentes modelos de otimização de alocação. Nas subseções seguintes três destes modelos são tratados, a saber: o modelo clássico de Markowitz, o modelo de minimização do Valor em Risco Condisional e o modelo de maximização do retorno proposto por Fabozzi (2007) (vide Tabela 1).

Tabela 1 Modelos de otimização de portfólio abordados neste texto

Método de minimização:	Métrica de risco:	
	Variância ou Desvio Padrão	CVar
(i) a minimização do estimador de risco dado um limite mínimo de taxa de retorno	Modelo Clássico de Markowitz	Minimização do valor em risco condicional
(ii) a maximização da taxa de retorno dado um limite máximo de estimador de risco	Modelo de Fabozzi (2007)	

Fonte: Elaborado pela autora

2.4.1 Minimização da variância

O modelo clássico de Markowitz (1952) busca minimizar o risco, que é mensurado através da variância do portfólio, para um dado um limite mínimo de taxa de retorno, conforme representação a seguir.

$$\min_{\mathbf{w} \in W} \sigma^2(\mathbf{w}) = \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}$$

$$s. a. \mathbf{w}' \mathbf{r} \geq rt_{min}$$

Em que,

- $\sigma^2(\mathbf{w})$ foi definido na subseção 2.2.4.

2.4.2 Minimização do Valor Condisional em Risco

A abordagem utilizando o Valor Condisional em Risco busca minimizar o risco, que é medido através de Cvar, para um dado nível de confiança e um limite mínimo de taxa de retorno esperado para o portfólio, conforme representação a seguir.

$$\min_{\mathbf{w} \in W} Cvar_{\beta}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\beta} \int_{f(\mathbf{w}, r) \leq p(\mathbf{w}, \beta)} f(\mathbf{w}, r) g(r) dr$$

$$s. a. \mathbf{w}' \mathbf{r} \geq rt_{min}$$

Em que,

- $Cvar_{\beta}(\mathbf{w})$ foi definido na subseção 2.2.4.

2.4.3 Maximização da taxa de retorno

O modelo de Fabozzi (2007) procura maximizar a taxa retorno limitando a variabilidade, medida através do desvio padrão resultante do portfólio. Esta métrica não distingue incerteza em relação às expectativas de taxas de retorno do risco associado a cada classe de ativos. A representação desta abordagem é descrita a seguir.

$$\max_{\mathbf{w} \in W} r_p(\mathbf{w}) = \mathbf{w}' \mathbf{r}$$

$$s. a. \sqrt{(\mathbf{r}_{der_i} - rt_{min})' \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{r}_{der_i} - rt_{min})} \leq k \text{ para todo } i$$

Onde,

- k é um parâmetro de limitação da variabilidade;
- $\mathbf{r}_{der_i} \in \mathbb{R}^N$ é um elemento do retorno amostral;
- $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ é a matriz inversa de $\boldsymbol{\sigma}$.

2.4.4 Incerteza nos parâmetros

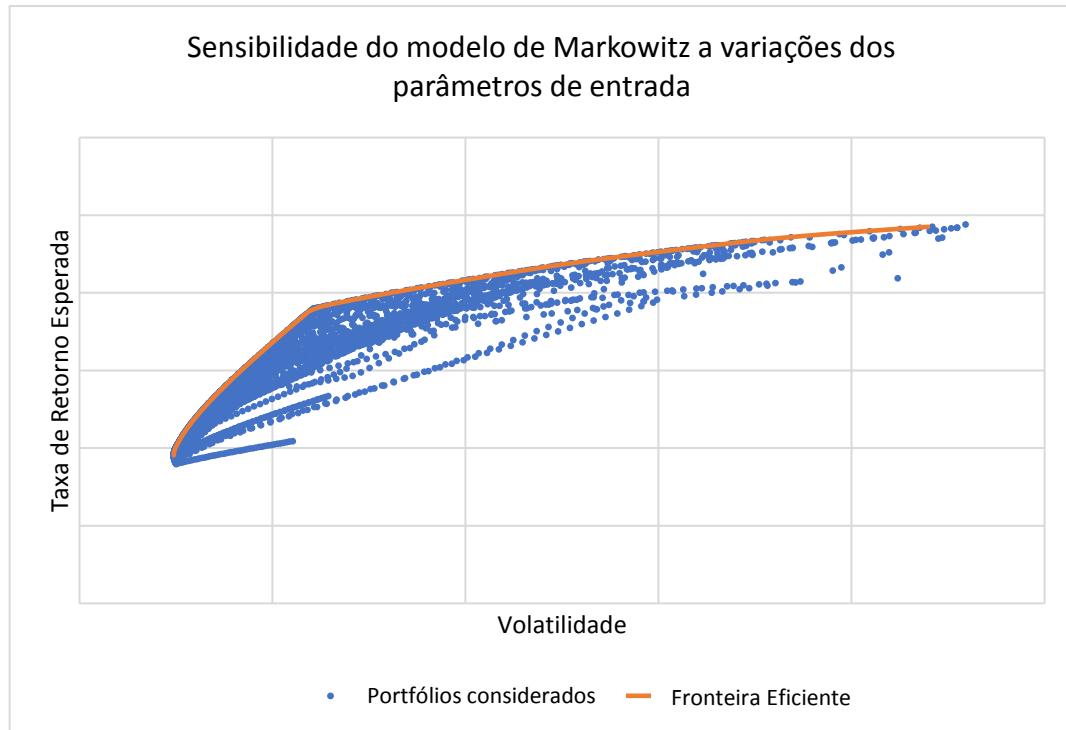
Os modelos abordados baseiam-se em parâmetros de expectativa de risco, retorno e correlação das diferentes classes de ativos. No entanto, as estimativas destes parâmetros frequentemente estão associadas a incertezas relevantes, uma vez que são projeções do comportamento de grupos de ativos em longos intervalos de tempo.

Estas incertezas tornam-se mais relevantes dependendo da sensibilidade do modelo às variações dos parâmetros. Considere, por exemplo, duas simulações cuja única diferença é uma pequena variação nos parâmetros de entrada contida no intervalo de incerteza. Se o portfólio gerado por uma das simulações for considerado significativamente ineficiente frente aos parâmetros da outra simulação, então o modelo é bastante sensível a incerteza. Esta característica prejudica sua aplicação em casos reais, uma vez que o portfólio apontado como ótimo pode gerar um desempenho bastante fraco dependendo do desvio do comportamento das classes de ativos em relação às estimativas iniciais.

O modelo tradicional de Markowitz pode ser considerado bastante sensível aos parâmetros de entrada. Para ilustrar tal dependência foram executadas diferentes simulações, cada uma com parâmetros de entrada distintos e contidos nas estimativas de incerteza. Dessa forma, cada uma destas simulações gerou um conjunto de portfólios considerados ótimos pelo modelo de Markowitz. Verificou-se, então, o desempenho de cada um destes portfólios em um

mesmo cenário, cujos parâmetros correspondem às estimativas iniciais. Por fim, estes resultados foram dispostos no Gráfico 12 juntamente com a fronteira eficiente obtida com os parâmetros estimados. Pode-se observar que há portfólios significativamente ineficientes resultantes de pequenos desvios na estimativa dos parâmetros.

Gráfico 12 Desempenho de portfólios considerados ótimos pelo modelo de Markowitz clássico para pequenas variações nos parâmetros de entrada. Os portfólios considerados representam portfólios eficientes de Markowitz para pequenas diferenças nos parâmetros de entrada



Fonte: Elaborado pela autora

Desta forma, fica evidente a necessidade de consideração de incerteza nos parâmetros de entrada dos modelos. O capítulo seguinte aborda algumas alternativas que consideram este desvio.

3 OS MODELOS DE INTERESSE

Estabelecida a fundamentação teórica, pode-se estudar diferentes modelos propostos na literatura para a solução do problema de otimização de alocação de recursos. A fim de analisá-los, faz-se para cada um uma breve descrição, o detalhamento das hipóteses e a indicação de técnicas de resolução.

3.1 O MODELO DE MARKOWITZ

O primeiro modelo considerado é o clássico de Markowitz em que, procura-se identificar o portfólio que minimiza o risco, que é medido pela variância, respeitando um limite mínimo de taxa de retorno. Segue a formulação, conforme já descrito na subseção 2.4.1.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in W} \sigma^2(\mathbf{w}) &= \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w} \\ s.a. \quad \mathbf{w}' \mathbf{r} &\geq rt_{min} \end{aligned}$$

O modelo supõe expectativa de taxas de retorno determinística para cada classe de ativos. Como visto anteriormente, há sensibilidade significativa a pequenas variações deste parâmetro, de forma que a aplicação em casos em que há incerteza pode ser bastante ineficiente.

Outra hipótese adotada pelo modelo é que a taxa de retorno resultante do portfólio pode ser adequadamente representada por uma distribuição normal multivariada, o que gera basicamente duas implicações. (i) Uma delas é que as classes de ativos individualmente também têm distribuição normal de probabilidade das taxas de retorno, de forma que a curva é simétrica e a variância é suficiente para descrever e comparar o risco entre as possíveis alocações. (ii) A outra implicação é considerar que a correlação entre os conjuntos de taxa de retorno das classes de ativos é linear e constante, de forma que basta o coeficiente de correlação linear para descrever a relação entre elas.

Para a resolução do modelo, pode-se observar que a função objetivo é quadrática e as restrições são lineares. Dessa forma, uma alternativa é a utilização de programação linear quadrática. Para garantir que a solução do problema com este método seja de fato o mínimo global, pode-se verificar que a função objetivo é convexa (vide Apêndice B.2) e que as condições de KKT se aplicam (vide Apêndice B.3).

Há, ainda uma alternativa de resolução para o caso particular de haver apenas restrições lineares de igualdade. Neste caso, a utilização de multiplicadores de Lagrange transforma o

problema em um sistema de equações lineares, o que diminui a demanda por capacidade computacional para os cálculos. Tal resolução é descrita no Apêndice B.6.

Para o cálculo da solução foi desenvolvido um modelo de simulação que utiliza a função *qpsolve* do software Scilab (vide código no Apêndice A).

3.2 O MODELO DE MICHAUD

Segundo Fabozzi (2007), a resolução do modelo de Markowitz se assimila a simulações caóticas, em que pequenas variações nos parâmetros de entrada resultam em grandes variações em seus resultados. Considerando a premissa de parâmetros determinísticos para cada componente do portfólio, tem-se que pequenos erros nas estimativas de taxa de retorno podem resultar em alocações significativamente menos eficientes (conforme já observado no Gráfico 12). Desta forma, diversos autores apresentaram alternativas para redução da sensibilidade do modelo a variações pequenas nos parâmetros de entrada.

Uma das possibilidades é a utilização do conceito de processos estocásticos, o qual utiliza variáveis aleatórias que evoluem com um fenômeno ou um sistema ao longo do tempo (Marchetti, 2010). A ideia do modelo é considerar não apenas um vetor de taxas de retorno, mas um conjunto deles que seja representativo da incerteza das estimativas. Para cada um destes vetores é calculada uma fronteira eficiente através do modelo clássico de Markowitz. Por fim, os portfólios de todas as fronteiras eficientes são agrupados convenientemente com o objetivo de gerar sugestões de alocação para cada nível de risco.

Apesar de o modelo considerar diferentes cenários, algumas das hipóteses de Markowitz continuam sendo adotadas. A distribuição de probabilidade das taxas de retorno continua sendo considerada normal, apesar da possibilidade de mudança nos parâmetros de média e desvio-padrão entre simulações de fronteiras diferentes. Analogamente, a correlação entre as classes de ativos continua sendo considerada linear, mas não mais constante, tendo em vista a possibilidade de variação da matriz de correlação entre os diferentes cenários.

Definidas as principais hipóteses adotadas, parte-se para o detalhamento do modelo e de técnicas de resolução. Neste caso, as variáveis aleatórias do processo estocástico considerado são os vetores de taxas de retorno das classes de ativos ($r_{der}^{(i)}$), que formam o conjunto a seguir.

$$X = \{r_{der}^{(1)}, r_{der}^{(2)}, \dots, r_{der}^{(m)}\}$$

Em que,

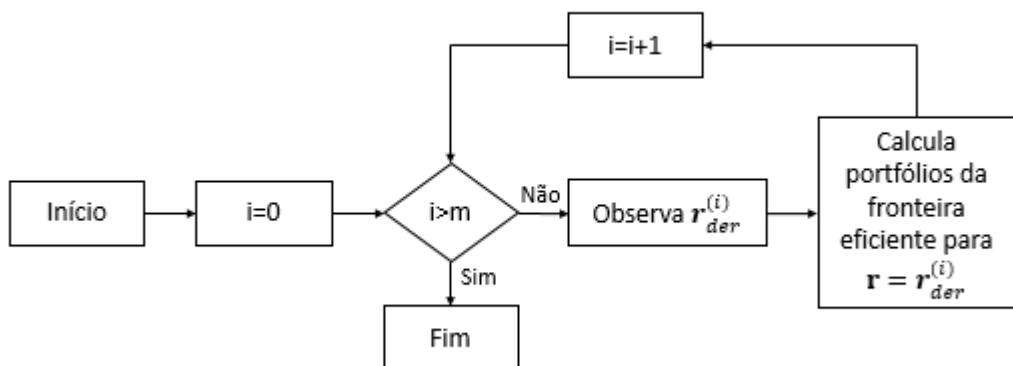
- X é o conjunto de vetores de taxa de retorno das classes de ativos que constituem as variáveis aleatórias do processo estocástico;

- m é o número de observações realizadas;

- $\mathbf{r}_{der}^{(i)} \in \mathbb{R}^N$ é o i -ésimo elemento do conjunto de taxas de retorno X .

Para cada um dos vetores que compõem o conjunto (X) das variáveis aleatórias, é calculada uma fronteira eficiente através do modelo clássico de Markowitz. Desta forma, se obtém um conjunto de fronteiras eficientes, que são resultantes do fenômeno estocástico (vide Figura 2).

Figura 2 Algoritmo de simulação estocástica



Fonte: Elaborado pela autora

Este conjunto de portfólios de diferentes fronteiras pode ser, então, agrupado convenientemente, para que se gere uma sugestão de alocação dependendo da suscetibilidade do investidor a risco. Há diferentes critérios para se realizar este agrupamento, desde que se respeite a propriedade de que todos os portfólios dentro de um grupo possuam a mesma probabilidade de ocorrência. Como o conjunto das fronteiras foi gerado aleatoriamente através de processo estocástico, basta que cada grupo selecione exatamente um portfólio de cada fronteira eficiente. Neste texto são abordadas duas possibilidades, a saber: o perfil de risco (a) e o nível de risco (b).

(a) O critério de agrupamento utilizado por Michaud (1998) considera o perfil de risco do investidor (vide subseção 2.3.6). Isto é, o nível de risco máximo ao qual o investidor se submete não é fixo para todas as fronteiras eficientes geradas, mas depende do intervalo de volatilidade em que cada fronteira está contida. Dessa forma, são formados grupos com pontos que possuem as mesmas características de perfil de risco (vide Gráfico 13).

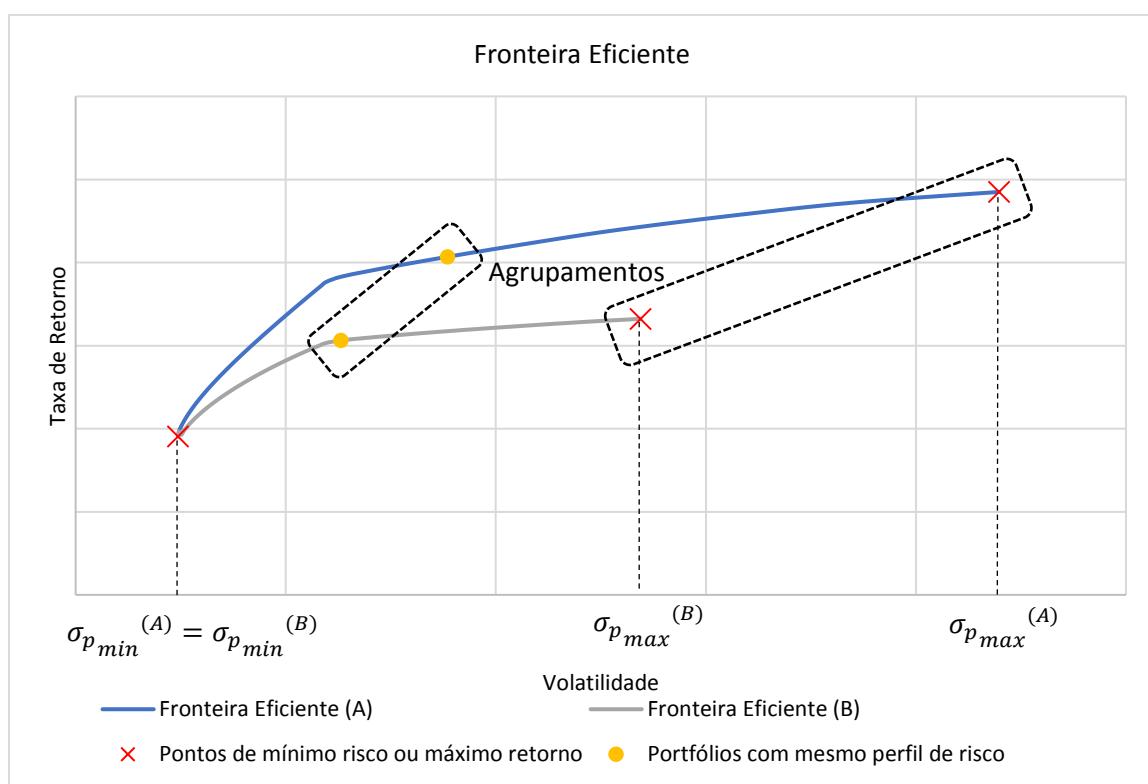
Para que dois portfólios de fronteiras eficientes diferentes (A e B) sejam agrupados no mesmo perfil de risco, deve-se satisfazer que

$$PR = \frac{\sigma_p^*(A) - \sigma_{p_{min}}(A)}{\sigma_{p_{max}}(A) - \sigma_{p_{min}}(A)} = \frac{\sigma_p^*(B) - \sigma_{p_{min}}(B)}{\sigma_{p_{max}}(B) - \sigma_{p_{min}}(B)}$$

Onde,

- A e B indicam duas fronteiras eficientes distintas;
- $\sigma_p^*(\cdot)$ é a volatilidade de um ponto da fronteira eficiente (\cdot) que apresenta o perfil de risco PR ;
- $\sigma_{p_{max}}(\cdot)$ é a volatilidade do ponto de maior taxa de retorno da fronteira eficiente (\cdot);
- $\sigma_{p_{min}}(\cdot)$ é a volatilidade do ponto de menor taxa de retorno da fronteira eficiente (\cdot).

Gráfico 13 Perfil de risco do investidor

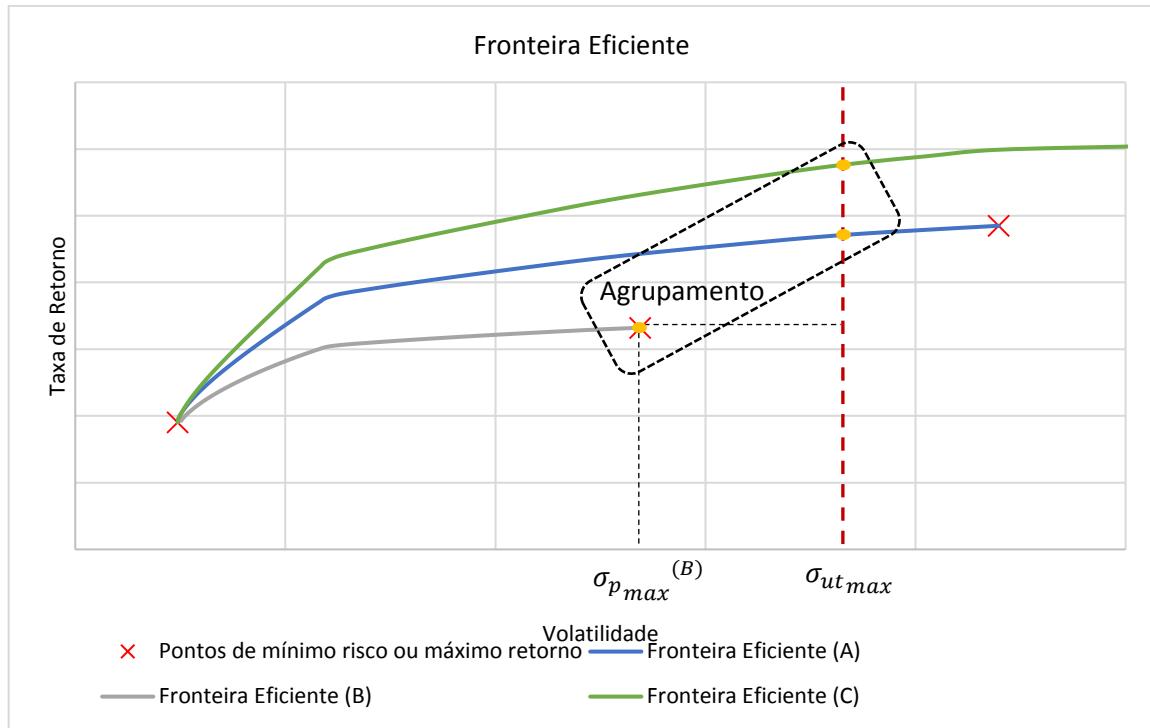


Fonte: Elaborado pela autora

(b) Outra possibilidade de agrupamento é através do nível de risco (vide subseção 2.3.6). A ideia é agrupar os portfólios definidos pela intersecção de cada uma das fronteiras eficientes com a vertical do nível de risco máximo pretendido pelo investidor ($\sigma_{ut_{max}}$) no plano retorno-risco (vide Gráfico 14).

Note, no entanto, que nem todas as fronteiras eficientes contêm portfólios ótimos para todos os níveis de risco, como é o caso exemplificado pela fronteira B do Gráfico 14. Para contornar este problema, optou-se pela seleção do ponto de maior nível de risco possível, ainda que ele seja inferior ao pretendido pelo investidor.

Gráfico 14 Agrupamento por nível de risco. Note que o ponto de máximo retorno da fronteira é utilizado no agrupamento com nível máximo de risco u_{ut} .



Fonte: Elaborado pela autora

Essa abordagem parece fazer sentido empiricamente. Considere, por exemplo, um cenário hipotético em que investimentos de maior risco apresentam uma perspectiva de desempenho pior, de forma que o nível de risco máximo pretendido pelo investidor (σ_{utmax}) não pode ser otimamente alcançado. Isso não necessariamente significa que as outras classes de ativos estão com pior desempenho. No entanto, se fosse aplicada a lógica de perfil de risco, a volatilidade de seu portfólio deveria ser diminuída proporcionalmente. O que pode implicar em uma redução expressiva do risco do portfólio, com uma resposta mais intensa do que seria necessário tendo em vista do cenário considerado. Já se fosse aplicada a lógica de nível de risco, seria selecionado o ponto da fronteira eficiente de maior volatilidade possível (σ_{pmax}), sendo mantida a eficiência com o nível de risco mais próximo possível do pretendido pelo investidor.

Determinados os grupos a serem considerados é possível estabelecer as sugestões de alocação para cada perfil ou nível de risco. Para isso, define-se o portfólio médio de cada

agrupamento como a média da alocação dos integrantes do grupo em cada classe de ativos, conforme formulação seguinte.

$$\bar{\mathbf{w}}^{(G)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{w}_i^{(G)} \text{ para todo } G$$

Onde,

- G é um dos agrupamentos de portfólios utilizando os critérios de nível ou perfil de risco;

- $\bar{\mathbf{w}}^{(G)} \in \mathbb{R}^N$ são as proporções de alocação do portfólio médio do grupo G em cada classe de ativos;

- $\mathbf{w}_i^{(G)} \in \mathbb{R}^N$ são as proporções da alocação do i -ésimo portfólio pertencente grupo G ;

- m é o número de portfólios contidos no grupo G , que coincide com o número de observações do processo estocástico.

Com estes desenvolvimentos já é possível obter uma fronteira formada pelos portfólios médios. No entanto, Michaud (1998) propõe a consideração de mais um passo, que é a filtragem das alocações consideradas extremas. Esta filtragem faz sentido empiricamente, uma vez que, mesmo em condições mais adversas de mercado é raro que em investimentos de longo prazo haja flexibilidade para mudanças muito grandes de alocação entre as classes de ativos de um portfólio.

Para isso, foi definida de uma métrica de distância de um portfólio em relação a outro, como mostrado na formulação a seguir.

$$c(\theta, \eta) = (\mathbf{w}_\theta - \mathbf{w}_\eta)' \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{w}_\theta - \mathbf{w}_\eta).$$

Onde,

- θ e η são dois portfólios quaisquer pertencentes ao mesmo grupo;

- $c(\theta, \eta) \in \mathbb{R}$ é a distância entre os portfólios θ e η ;

- $\mathbf{w}_{(\cdot)}$ é a alocação do portfólio (\cdot) ;

- $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é a matriz de covariância entre as classes de ativos.

Essa métrica é, então, utilizada para medir a distância dos portfólios de um grupo em relação ao portfólio médio deste grupo. Desta forma, os portfólios mais distantes do médio são excluídos do agrupamento e os novos portfólios médios são calculados a partir dos elementos restantes.

3.3 MODELO DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA

Assim como na abordagem da seção anterior, os modelos de otimização robusta também procuram reduzir a sensibilidade dos resultados a pequenas variações nos parâmetros de entrada das simulações. No entanto, ao invés da utilização do conceito de processos estocásticos, emprega-se a otimização robusta, isto é, desenvolvem-se modelos suficientemente imunes às incertezas nos dados (Alem e Morabito, 2015).

A abordagem robusta descrita por Costa e Paiva (2000) pretende selecionar portfólios que minimizem o máximo risco considerando todos os elementos de uma amostra e garantindo retorno mínimo do portfólio sob incerteza. Para isso o modelo considera variabilidade nas taxas de retorno e as matrizes de covariância. Diferentemente do modelo descrito na seção anterior, que adota a média das alocações eficientes, neste caso o risco do pior caso é minimizado.

Esta abordagem de otimização robusta também tem como base o trabalho de Markowitz, o que implica na adoção de hipóteses similares. Desta forma, a distribuição de probabilidade de taxa de retorno resultante de um portfólio continua sendo suposta normal multivariada, apesar de serem considerados diferentes parâmetros de acordo com a variação dos cenários.

Definidas as principais hipóteses, parte-se para o detalhamento do modelo e de técnicas de resolução. Neste caso, a variabilidade é representada através de dois conjuntos: um de vetores de taxa de retornos das classes de ativos e outro de matrizes de covariância.

$$R_{ini} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$$

$$D_{ini} = \{\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \dots, \boldsymbol{\sigma}_n\}$$

Onde,

- R_{ini} é o conjunto de taxas de retorno das classes de ativos inicialmente considerado;
- D_{ini} é o conjunto de matrizes de covariância inicialmente considerado;
- m é o número de elementos de R_{ini} ;
- n é o número de elementos de D_{ini} ;
- $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^N$ é o i-ésimo elemento de R_{ini} ;
- $\boldsymbol{\sigma}_i \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é o i-ésimo elemento de D_{ini} .

Os elementos da amostra são, então, definidos pela combinação linear dos elementos de dos conjuntos iniciais, conforme formulação seguinte.

$$R_{der} = \{\mathbf{r}_{der} | \mathbf{r}_{der} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{r}_i\}$$

$$D_{der} = \{\boldsymbol{\sigma}_{der} | \boldsymbol{\sigma}_{der} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \boldsymbol{\sigma}_i\}$$

Onde,

- R_{der} é o conjunto de elementos da amostra de taxa de retorno das classes de ativos;

- $\mathbf{r}_{der} \in \mathbb{R}^N$ é um elemento do conjunto R_{der} ;
- $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $\gamma_i \in \mathbb{R}$ são valores quaisquer que representam os coeficientes para a combinação linear dos vetores de taxa de retorno inicialmente considerados;
- D_{der} é o conjunto de elementos da amostra de matrizes de covariância;
- $\boldsymbol{\sigma}_{der} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é um elemento do conjunto D_{der} .

Formado os conjuntos, os autores propõem o seguinte modelo para a representação do problema de otimização robusta.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w} \in W, \alpha} \alpha \\ & \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \mathbf{w} \leq \alpha \text{ para todo } \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \in D_{der} \\ & \mathbf{w}' \mathbf{r}_{der}^{(i)} + r_f (1 - [1 \dots 1] \mathbf{w}) \geq rt_{min} \text{ para todo } \mathbf{r}_{der}^{(i)} \in R_{der} \end{aligned}$$

Onde,

- $\alpha \in \mathbb{R}$ é a máxima variância dentre todos os cenários de retorno e covariância considerados;

- $\mathbf{r}_{der}^{(i)} \in \mathbb{R}^N$ é o i-ésimo elemento da amostra de vetores de taxa de retorno (R_{der});
- $\boldsymbol{\sigma}^{(j)} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é o j-ésimo elemento da amostra de matrizes de covariância (D_{der});
- $r_f \in \mathbb{R}$ é o retorno atribuído ao investimento considerado, no limite, livre de risco.

A primeira restrição ($\mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \mathbf{w} \leq \alpha$) resulta em uma inequação convexa não-linear. Uma maneira de contornar esta questão é utilizando a linearização através do complemento de Schur (vide Apêndice B.5). Dessa forma, a solução do problema passa pela resolução de uma otimização com desigualdade matricial linear (da sigla em língua inglesa LMI).

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w} \in W, \alpha} \alpha \\ & \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \mathbf{w} & \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \end{bmatrix} \geq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \\ & \mathbf{w}' \mathbf{r}_{der}^{(i)} + r_f (1 - [1 \dots 1] \mathbf{w}) \geq rt_{min} \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

A resolução deste problema de otimização linear gera uma sugestão de alocação dada uma taxa de retorno mínima esperada para o portfólio. Para isso foi utilizada a função *lmisolver* do software Scilab (vide código no Apêndice A).

3.4 O MODELO DE ROCKAFELLAR E URYASEV

O modelo de Rockafellar e Uryasev (2000) difere dos abordados anteriormente por considerar o Valor em Risco Condisional do portfólio como métrica de risco e não mais a

variância. O objetivo é identificar portfólios que resultam no menor CVar possível, para uma taxa de retorno mínima e um nível de confiança. Para isso, a variabilidade é considerada através de uma amostra de taxas de retorno das diferentes classes de ativos. Desta forma, a formulação do modelo é a seguinte (conforme já visto na subseção 2.4.2).

$$\min_{\mathbf{w} \in W} Cvar(\mathbf{w}) = \frac{1}{\beta} \int_{f(\mathbf{w}, r) \leq p(\mathbf{w}, \beta)} f(\mathbf{w}, r) g(r) dr$$

s. a. $\mathbf{w}' \mathbf{r} \geq rt_{min}$

Neste caso, não é necessário que as distribuições de probabilidade das taxas de retorno sejam normais, nem mesmo simétricas, uma vez que as próprias amostras são utilizadas para descrever a população. A correlação também não é suposta linear, mas é subentendida através dos elementos das amostras. Desta forma, uma das principais hipóteses do modelo, é a representatividade da amostra considerada, da qual serão extraídos implicitamente os parâmetros de resolução.

Consideradas estas premissas, Rockafellar e Uryasev (2000) sugeriram uma resolução para o problema de minimização de CVar (vide subseção 2.2.4). Primeiramente os autores notaram que a minimização de

$$CVar_\beta(\mathbf{w}) = \frac{1}{\beta} \int_{f(\mathbf{w}, r_p) \leq p(\mathbf{w}, \beta)} f(\mathbf{w}, r_p) g(r_p) dr_p$$

é análoga à minimização da expressão

$$F_\beta(\mathbf{w}, p) = p + \frac{1}{\beta} \int_{f(\mathbf{w}, r_p) \leq p(\mathbf{w}, \beta)} (f(\mathbf{w}, r_p) - p) g(r_p) dr_p.$$

Em que, conforme já descrito na seção 2.2.4,

- r_p é a taxa de retorno resultante do portfólio;
- $g(r_p)$ é a distribuição de probabilidade de taxas de retorno de um dado portfólio \mathbf{w} ;
- $f(\mathbf{w}, r_p)$ é a distribuição de probabilidade de taxas de retorno em função da alocação;
- β é o complementar do nível de confiança, representando a probabilidade de taxa de retorno menor que a perda máxima;
- $CVar_\beta(\mathbf{w})$ é CVar para um dado β e um portfólio com alocações \mathbf{w} .

Posteriormente foi considerada a representação da forma discretizada da expressão $F_\beta(\mathbf{w}, p)$, da seguinte maneira.

$$F_\beta(\mathbf{w}, p) = p + \frac{1}{J\beta} \sum_{i=1}^J [f(\mathbf{w}, r_i) - p]^+$$

Onde,

$$-[t]^+ = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

- J é o número de elementos da amostra resultante da discretização da distribuição de probabilidade.

Pode-se, ainda, transformar o problema em um caso de programação linear substituindo $(f(\mathbf{w}, r) - p)^+$ por z_i e adicionando as seguintes restrições.

$$\begin{aligned} -z_i + \mathbf{w}' \mathbf{r} - p &\leq 0 \\ z_i &\geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, J \end{aligned}$$

Por fim, o resultado é a solução do seguinte problema de programação linear.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w} \in W, p} \quad & p + \frac{1}{J\beta} \sum_{i=1}^J z_i \\ \text{s.a.} \quad & -z_i + \mathbf{w}' \mathbf{r} - p \leq 0 \\ & z_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, J \\ & \mathbf{w}' \mathbf{r} \geq rt_{min} \end{aligned}$$

Portanto, através de uma amostra de vetores de taxas de retornos das classes de ativos é possível identificar uma alocação que minimiza CVar do portfólio para o nível de confiança β e uma taxa de retorno maior ou igual a rt_{min} . Isso foi feito utilizando a função *karmarkar* do software de simulação Scilab (vide código no Apêndice A).

3.5 MODELO DE MAXIMIZAÇÃO DE RETORNO

O modelo de maximização de retorno descrito por Fabozzi (2007) busca maximizar a taxa de retorno de um portfólio dado um limite máximo de variabilidade, medida através do desvio-padrão resultante da alocação. Esta abordagem difere das anteriores uma vez que o retorno não é considerado uma restrição, mas o objetivo da otimização. Segue o modelo conforme descrito na subseção 2.4.3.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w} \in W} r_p(\mathbf{w}) &= \mathbf{w}' \mathbf{r} \\ \text{s.a.} \quad & \sqrt{(\mathbf{r}_{der_i} - rt_{min})' \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{r}_{der_i} - rt_{min})} \leq k \text{ para todo } i \end{aligned}$$

Onde,

- k é um parâmetro de limitação da variabilidade;
- $\mathbf{r}_{der_i} \in \mathbb{R}^N$ é um elemento do retorno amostral;

- σ^{-1} é a matriz inversa de σ .

Para esta abordagem, considera-se que a expectativa de taxa de retorno para cada classe de ativos é determinística. O modelo também adota hipóteses de correlação linear constante entre as classes de ativos e distribuições de probabilidade normal de taxas de retorno.

O modelo sugerido por Fabozzi (2007) pode ser resolvido utilizando um artifício através de dualidade. O primeiro passo envolve a solução do problema original, considerando as alocações do portfólio como fixas e os retornos de cada classe de ativos como variáveis.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{r}_{der}} & \mathbf{w}' \mathbf{r}_{der} \\ & \|\sigma^{-0.5} (\mathbf{r}_{der} - \mathbf{r})\| \leq k \end{aligned}$$

Onde,

- k é um parâmetro de limitação da variabilidade;

- $\|\sigma^{-0.5} (\mathbf{r}_{der} - \mathbf{r})\|$ equivale a $\sqrt{(\mathbf{r}_{der} - \mathbf{r})' \sigma^{-1} (\mathbf{r}_{der} - \mathbf{r})}$ segundo o autor.

Posteriormente, sugere-se utilizar o problema dual para a otimização sem incerteza nos parâmetros. Como a formulação anterior é um cone de segunda ordem (SOCP) (Reis, 2013), obtém-se o seguinte dual.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}, \mathbf{r}_{der}} & -(-\mathbf{u}' \sigma^{-0.5} \mathbf{r}) - kv \\ & \sigma^{-0.5} \mathbf{u} + 0.v = \mathbf{w} \\ & \|\mathbf{u}\| \leq v \end{aligned}$$

Onde,

- $u \in \mathbb{R}^N$ e $v \in \mathbb{R}$ são parâmetros do problema dual.

Se $\mathbf{u} = \sigma^{-0.5} \mathbf{w}$ então o problema pode ser escrito da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \max_{v} & \mathbf{w}' \mathbf{r} - kv \\ & \|\sigma^{-0.5} \mathbf{w}\| \leq v \end{aligned}$$

Segundo a dualidade, a otimização deste problema seria análoga à otimização do problema original, de tal forma que o menor retorno seria dado pela seguinte expressão.

$$\mathbf{w}' \mathbf{r} - kv \geq \mathbf{w}' \mathbf{r} - k \|\sigma^{-0.5} \mathbf{w}\| = \mathbf{w}' \mathbf{r} - k \sqrt{\mathbf{w}' \sigma \mathbf{w}}$$

Note que esta expressão não depende do conjunto de retornos sujeitos a aleatoriedade.

Basta, então, substituir a função objetivo do problema inicial.

$$\max_{\mathbf{w} \in W} \mathbf{w}' \mathbf{r} - k \sqrt{\mathbf{w}' \sigma \mathbf{w}}$$

Obteve-se, assim, uma formulação similar ao modelo de Markowitz, com, no entanto, uma penalização para desvio-padrão, seja ele associado ao risco ou à incerteza dos parâmetros

de taxa de retorno. O cálculo foi feito utilizando a função *optim* do software de simulação Scilab (vide código no Apêndice A).

3.6 A ABORDAGEM UTILIZADA

Conforme brevemente citado nas seções anteriores, a resolução de cada um dos modelos envolve hipóteses sobre o comportamento dos três principais parâmetros: métricas de risco, retorno e correlação. Desta forma, esta seção se dedica a expor as implicações destas premissas nos resultados obtidos por cada uma das abordagens. O Figura 3 e a Tabela 2 resumem essa discussão.

Figura 3 Hipóteses adotadas na resolução dos modelos



Fonte: Elaborado pela autora

Tabela 2 Hipóteses consideradas pelas diferentes abordagens

	Correlação	Risco	Retorno
Markowitz	Linear	Variância constante	Determinístico com distribuição simétrica
Michaud	Linear com diferentes cenários	Incerteza na variância	Estocástico com distribuição simétrica
Otimização robusta	Linear com diferentes cenários	Incerteza na variância	Diferentes cenários com distribuição simétrica
Rockafellar e Uryasev	Implícita	CVar do portfólio	Pode ter distribuição assimétrica
Maximização do retorno	Linear	Desvio-padrão constante	Determinístico com distribuição simétrica

Fonte: Elaborado pela autora

3.6.1 A abordagem em relação ao retorno

Primeiramente é considerada a expectativa de taxa de retorno de longo prazo para cada uma das classes de ativos. Tanto no modelo clássico de Markowitz quanto no modelo de maximização do retorno, é suposto que este parâmetro é determinístico. Desta forma, em ambos os casos, é possível que pequenos erros nas estimativas possam resultar em sugestões de alocação bastante ineficientes.

Neste texto foram abordadas duas alternativas para a consideração de variabilidade deste parâmetro no modelo clássico de Markowitz: uma delas através de processos estocásticos, no modelo de Michaud (1998), e a outra através de otimização robusta, no modelo de Costa e Paiva (2000). Em ambos os casos é necessária a consideração de um conjunto de vetores de retorno como parâmetros de variabilidade da simulação. Em um deles, estes vetores compõem o conjunto de variáveis aleatórias do processo estocástico (X); em outro, formam o conjunto inicial de taxas de retorno consideradas para a otimização robusta (R_{ini}) (vide seção 3.2 e 3.3). Desta forma, os vetores são necessários para a incorporação de diferentes cenários a serem considerados pelos modelos.

Para a geração do conjunto de vetores a serem usados nas simulações, são, neste texto, consideradas duas possibilidades. Uma delas é a utilização de um conjunto de dados históricos, de tal forma que os elementos da amostra são as taxas de retorno das classes de ativos observadas em determinados intervalos de tempo coincidentes. Outra possibilidade é a aplicação de uma simulação de Monte Carlo parametrizada a partir das características observadas nas amostras históricas. Neste texto, os parâmetros utilizados na simulação de Monte Carlo têm como hipótese a distribuição de probabilidade normal multivariada dos conjuntos históricos de retorno (vide Apêndice B.4).

Por fim, no caso do modelo de otimização de Rockafellar e Uryasev, também é considerada variabilidade das taxas de retorno das classes de ativos. De forma análoga aos modelos estocástico e robusto, isto é feito através de conjuntos de vetores que representam diferentes cenários. Desta forma, o conjunto destes cenários é utilizado para a construção da distribuição de probabilidade de retornos resultantes do portfólio e posterior cálculo de CVar. Pode-se também considerar neste caso tanto a utilização de amostras históricas quanto a geração de vetores de retorno através de uma simulação de Monte Carlo.

As soluções aplicadas neste trabalho consideraram a variabilidade nas expectativas de retorno através de um conjunto de vetores gerados por uma simulação de Monte Carlo, que adotou a hipótese de distribuição normal multivariada (vide Apêndice B.4).

3.6.2 A abordagem em relação à métrica de risco

É considerada agora a métrica adotada pelos modelos para representar o risco das classes de ativos e do portfólio resultante das alocações. No caso do modelo clássico de Markowitz, utiliza-se a variância da distribuição de probabilidade das taxas de retorno. Esta hipótese considera que as distribuições de retorno tanto para classes de ativos quanto para o portfólio são normais, de forma que podem ser completamente definidas e comparadas através da média e do desvio-padrão. A adoção desta premissa também implica que as distribuições de retorno são simétricas, de forma que a limitação da probabilidade de perda torna-se análoga à limitação da variância. Desta forma, se o modelo for aplicado a distribuições de retorno que se afastam significativamente da hipótese de simetria, pode-se incorrer distorções da métrica de risco, com possível penalização equivocada dos desvios acima da média e redução do impacto dos desvios abaixo da média.

A variância como métrica de risco no modelo de Markowitz é considerada determinística e constante para intervalos de longo prazo. Desta forma, caso haja incerteza considerável na definição dos parâmetros de variância de cada classe de ativos, pode-se obter uma alocação bastante ineficiente.

As hipóteses adotadas pelo modelo de maximização do retorno são análogas às adotadas pelo modelo de Markowitz, com a única diferença de que a métrica de risco utilizada é o desvio-padrão e não a variância.

Os modelos de Michaud e de otimização robusta também utilizam variância como métrica de risco e mantêm a hipótese de normalidade das distribuições de probabilidade das taxas de retorno das diferentes classes de ativos. No entanto, para ambas as abordagens é

possível considerar incerteza nos parâmetros de risco. Isso é feito de forma análoga ao descrito na subseção anterior para o conjunto de vetores de taxas de retorno, considerando, no entanto, um conjunto de diferentes cenários de variância, expressos através de diferentes matrizes de covariância.

O modelo de Rockafellar e Uryasev utiliza o Valor em Risco Condicional como métrica de risco. Neste caso, as hipóteses são menos rígidas, de forma que dado um conjunto representativo de cenários de taxa de retorno, não é necessário que a distribuição de probabilidade deles seja normal, podendo ser até mesmo assimétrica.

As soluções aplicadas neste trabalho consideraram apenas variabilidade nas expectativas de retorno para as classes de ativos e não na variância.

3.6.3 A abordagem em relação à correlação entre as classes de ativos

A maneira com que a correlação entre as classes de ativos é considerada difere entre as abordagens. Os modelos de Markowitz e de minimização da taxa de retorno consideram a correlação linear e determinística. Desta forma, a aplicação deste modelo para classes de ativos cuja relação entre as taxas de retorno é incerta ou distante de uma reta pode ser questionada.

Os modelos de Michaud e de otimização robusta adotam a correlação linear entre as classes de ativos, mas preveem variabilidade. Isso é feito através da consideração de diferentes cenários expressos através do conjunto de matrizes de covariância.

Alternativamente, é possível utilizar modelos mais complexos que são capazes de descrever um grande leque de outras estruturas de relação. Este é o caso, por exemplo, das Funções de Copulas (Embrechts, 2001; Joe (1997); Nelsen (1999)). No entanto, estes conceitos não foram aplicados neste trabalho.

Por fim, no modelo de Rockafellar e Uryasev não é necessária a descrição explícita das relações entre as taxas de retorno das classes de ativos. Desta forma, considerando que a amostra utilizada é representativa, não se delimitam hipóteses de correlação.

4 RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo são definidos os parâmetros e os métodos de aplicação dos modelos em classes de investimentos tipicamente utilizadas no mercado de capitais. Dessa forma, são definidos critérios para a amostragem de taxas de retorno históricas e para parâmetros dos modelos de otimização.

A seguir, são aplicados métodos de verificação dos modelos, para garantir que a construção foi adequada, e técnicas de validação, para realizar a comparação entre os resultados dos modelos (Pace, 2004).

4.1 A DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS

Nesta seção pretende-se definir os parâmetros a serem utilizados na aplicação dos modelos. Desta forma, primeiro são delimitadas as classes de ativos a serem consideradas, posteriormente são definidos os parâmetros para coleta de amostra de dados históricos.

4.1.1 A delimitação das classes de ativos consideradas

A partir da aplicação dos critérios de agrupamento de investimentos com comportamento similar (vistos anteriormente na subseção 2.3.3), foram consideradas nove classes de ativos. A seguir é feita uma breve descrição de cada uma delas.

Estratégias de baixa duração e com grau de investimento (IGSD) tipicamente funcionam como substitutos de caixa e evitam que o recurso fique desinvestido. Dessa forma, é esperado que estas alocações sejam bastante líquidas, com baixa duração e com risco e taxa de retorno baixos. Podem ser incluídas nessa classe de ativos dívidas de empresas para uso como capital de giro e dívidas de curto prazo do governo estadunidense, por exemplo.

Dívidas de empresas com grau de investimento (IG CORP) compreendem alocações que podem ter uma duração maior, porém com um risco de não-pagamento bastante baixo. São créditos líquidos, com taxa de retorno limitada, emitidos por companhias consideradas sólidas pelo mercado. Tanto nesta classe de ativos quanto na anterior, a dispersão dentro dos grupos tende a ser baixa.

Dívidas de empresas sem grau de investimento (HY CORP) compreendem alocações com certa duração e com um risco mais elevado de não-pagamento. Eles são créditos líquidos emitidos por companhias cuja solidez é questionada pelo mercado, sendo muitas vezes

considerados papéis especulativos. A expectativa de taxa de retorno tende a ser mais elevada que no caso de empresas com grau de investimento.

Retorno absoluto (ABS RET) compreende investimentos que têm uma taxa de retorno bastante descorrelacionada entre si e de outras classes de ativos, isto é, os fatores que influenciam seu comportamento tendem a ser específicos e diferentes do restante do mercado de capitais. Eles podem incluir, por exemplo, instrumentos financeiros alternativos, alocações em setores econômicos específicos e exploração de situações de assimetria de valor. A relação de risco-retorno e duração podem variar bastante entre os tipos de investimento dentro desta classe de ativos.

Ações públicas de mercados desenvolvidos (EQ DM) incluem papéis líquidos de empresas de capital aberto cujas sedes estão em países desenvolvidos. As expectativas de taxa de retorno e o risco tendem a ser mais elevadas que no caso de crédito. A liquidez destes investimentos tende a ser alta, mas dependendo da estratégia a duração pode se estender.

Ações públicas de mercados emergentes (EQ EM) incluem papéis líquidos de empresas de capital aberto cujas sedes estão em países em desenvolvimento. Comparado com as empresas em países desenvolvidos, a perspectiva de risco e retorno é maior, assim como a dispersão dentro da classe de ativos. Apesar de haver uma variação grande, dependendo da bolsa de valores onde os papéis são operados, tipicamente a liquidez é menor em países emergentes.

Dívidas de empresas privadas (PRIV CRED) incluem alocações em créditos de companhias de capital fechado. Este investimento é ilíquido uma vez que a retirada do recurso antes da conclusão do projeto não é possível. O comportamento desta classe de ativos tende a ter uma correlação alta com as dívidas de empresas sem grau de investimento, porém com uma taxa de retorno adicional em função da iliquidez.

Real estate (RE) inclui investimentos ilíquidos imobiliários, destinados a venda, e de base imobiliária, destinados à operação. Essa classe de ativos inclui uma gama grande de alocações, incluindo, por exemplo, fundos de investimento imobiliário e corretoras de imóveis. Assim como as outras alocações ilíquidas, há questionamentos quanto ao método de precificação do ativo, que geralmente se dá trimestralmente. Mesmo que cotas do fundo sejam negociadas no mercado, o que aumenta a frequência de precificação, há limitações de acesso público à informação.

Ações de empresas privadas (PRIV EQ) incluem participação em empresas de capital fechado. Esta classe de ativos é ilíquida e em vários casos pode incluir interferência elevada do investidor na companhia.

Ativo livre de risco (RF) não é considerada uma classe de ativos nesta abordagem, mas corresponde à taxa de retorno resultante de uma alocação considerada livre de risco. Tipicamente são usados títulos de dívida do governo federal estadunidense como referências de remuneração. O montante não investido em nenhuma das nove classes de ativos é considerado alocado em ativo livre de risco.

A cada uma das classes foi atribuído um índice que corresponde ao comportamento médio das taxas de retorno dos ativos classificados neste grupo (vide Tabela 3).

Tabela 3 Classes de ativos

Símbolo	Classe de Ativos	Código	Índice
<i>rf</i>	Livre de risco	RF	U.S. 10 Year Treasury Note
<i>w1</i>	Baixa duração com grau de investimento	IG SD	S&P 3-6M US T-bill TR Index
<i>w2</i>	Dívidas de empresas com grau de investimento	IG CORP	Barclay NNG US Aggregate
<i>w3</i>	Dívidas de empresas sem grau de investimento	HY CORP	Bofa US HY Index
<i>w4</i>	Retorno absoluto	ABS RET	HFRI Equal Fund Avg
<i>w5</i>	Ações públicas de mercados desenvolvidos	EQ DM	MSCI World USD
<i>w6</i>	Ações públicas de mercados emergentes	EQ EM	MSCI EM USD
<i>w7</i>	Dívidas de empresas privadas	PRIV CRED	Cliffwater Direct Lending Index
<i>w8</i>	Real Estate	RE	Cambridge associates RE index
<i>w9</i>	Ações de empresas privadas	PRIV EQ	Cambridge associates us private equity index

Fonte: Elaborado pela autora

O uso destes índices envolve algumas limitações, sendo algumas delas destacadas a seguir.

Ao considerar a média das taxas de retorno de todos os ativos de uma determinada classe, a possibilidade de incremento de valor decorrente do alpha é desconsiderada. Assim, um possível benefício de uma boa seleção de ativos em classes de maior dispersão é ignorado.

Além disso, índices nem sempre são representativos do mercado de interesse do investidor. É possível, por exemplo, que o desenvolvimento de uma classe de ativos seja relativamente recente, de maneira que seus principais agentes ainda não tenham se consolidado para a formação de um índice representativo. Outro caso comum é a limitação de ativos nos quais o investidor está disposto a alocar recursos, de maneira que se incorre em um erro decorrente da adoção de todo o índice na representação da classe de ativos.

Uma última limitação destacada é a necessidade de ajustes na formulação para algumas classes de ativos, em decorrência de limitação do horizonte de dados históricos disponíveis ou de limitação de informações de retorno na frequência pretendida na aplicação.

4.1.2 O cálculo dos parâmetros

Nesta subseção são definidas as unidades amostrais e descritas as formulações para o cálculo dos parâmetros. Para isso é necessária a definição dos intervalos a serem considerados na coleta dos elementos da amostra de taxas de retorno históricas. Com este objetivo são definidos dois intervalos de tempo. Um deles se refere ao período de otimização da alocação, que neste caso compreende uma janela de longo prazo. O outro compreende a unidade mínima de tempo correspondente à frequência utilizada na coleta de preços dos ativos.

- T é o período considerado para a otimização da alocação do portfólio;
- t é a mínima unidade de tempo entre duas coletas consecutivas de dados sobre o preço dos índices das classes de ativos.

Analogamente à definição dos intervalos considerados também são definidas duas métricas para a taxa de retorno. Uma delas compreende a taxa de retorno para um intervalo T e a outra a taxa de retorno para um intervalo t .

- $\mathbf{r}^{(j)} \in \mathbb{R}^N$ é o j -ésimo elemento da amostra de taxas de retorno em um intervalo T ;

- $\rho^{(q)} \in \mathbb{R}^N$ é o q -ésimo elemento da amostra de taxas de retorno em um intervalo t .

Para a coleta de dados relacionados à taxa de retorno $\mathbf{r}^{(j)}$, optou-se pela consideração de janelas móveis consecutivas que divergem entre si de t , conforme formulação seguinte.

$$\mathbf{r}^{(j)} = (\mathbf{V}^{(i+T)} / \mathbf{V}^{(i)})^{1/T} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}^{(j+1)} = (\mathbf{V}^{(i+T+t)} / \mathbf{V}^{(i+t)})^{1/T} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Onde,

- $\mathbf{V}^{(i)} \in \mathbb{R}^N$ é o valor monetário do investimento no instante i ;

- J é o número de elementos da amostra;

- \mathbf{a} / \mathbf{b} representa a divisão termo a termo dos elementos de \mathbf{a} pelos elementos de \mathbf{b} .

Já para a coleta de dados relacionados à taxa de retorno $\rho^{(q)}$, a seguinte formulação foi utilizada.

$$\rho^{(q)} = \left(\frac{\mathbf{V}^{(i+t)}}{\mathbf{V}^{(i)}} \right)^{\frac{t}{T}} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para a aplicação em questão foi escolhido o intervalo de 10 anos para a otimização do portfólio e de 1 mês para a unidade mínima de tempo de coleta de dados. A amostra contou com 120 elementos, com dados mensais de janeiro de 1998 a dezembro de 2017. O conjunto de séries históricas de preços foi obtido através do acesso a um terminal Bloomberg (2018).

$$T = 10 \text{ anos}$$

$$t = 1 \text{ mês}$$

$$J = 120$$

Definidas as unidades amostrais, podem ser calculadas as métricas consideradas para estimação dos parâmetros dos modelos, incluindo taxa de retorno, variância e correlação das classes de ativos.

A estimativa para taxa de retorno das classes de ativos é a média das taxas de retorno dos intervalos amostrais de otimização (T).

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^J \mathbf{r}^{(k)}$$

Onde,

- $\hat{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^N$ é estimador de taxa de retorno das classes de ativos;

- $\mathbf{r}^{(k)} \in \mathbb{R}^N$ é k-ésimo elemento da amostra de taxas de retorno.

Para o cálculo da correlação entre as classes de ativos, foi considerado todo o intervalo amostral de taxa de retorno na unidade mínima de tempo.

$$\text{corr}_{a,b} = \text{corr}(\{\rho_a^{(1)}, \rho_a^{(2)}, \dots, \rho_a^{(T/t)}\}, \{\rho_b^{(1)}, \rho_b^{(2)}, \dots, \rho_b^{(T/t)}\})$$

Onde,

- $\rho_{(\cdot)}^{(i)}$ é o i-ésimo elemento da amostra de taxas de retorno da classe de ativo (\cdot) em um intervalo t ;

- a e b representam duas classes de ativos;

- $\text{corr}_{a,b}$ é o coeficiente de correlação linear das classes de ativos a e b .

No caso do cálculo da variância das classes de ativos também foram consideradas duas métricas: uma para estimar o risco da classe de ativos, que é associado às taxas de retorno $\rho^{(q)}$, e a outra para estimar a incerteza do parâmetro de taxa de retorno, que é associado $\mathbf{r}^{(k)}$.

Para a variância como métrica de risco, o valor usado é a média das variâncias de ρ dentro de cada janela móvel de intervalo de tempo T .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{J} \sum_{k=1}^J \hat{\sigma}^2(\{\rho^{(k)}, \rho^{(k+1)}, \dots, \rho^{(k+T/t-1)}\})$$

Onde,

- $\widehat{\sigma}^2$ é estimador da variância utilizada como métrica de risco.

Já para a variância como métrica de incerteza dos parâmetros, o valor utilizado é a variância entre as taxas de retorno dos intervalos de tempo de otimização T . Este resultado será utilizado como parâmetro para a geração de conjuntos de retorno através da simulação de Monte Carlo.

$$\widehat{\sigma}_{ch}^2 = \widehat{\sigma}^2(\{r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(J)}\})$$

- $\widehat{\sigma}_{ch}^2$ é estimador da variância utilizada como métrica de incerteza de parâmetros.

4.1.3 As restrições lineares

Foram consideradas restrições lineares de alocação (i) de cada classe de ativos individualmente, (ii) do total de investimentos ilíquidos do portfólio e (iii) do limite de alocação máximo do portfólio todo, conforme formulação seguinte. Esta última restrição implica que são considerados apenas portfólios com *Exposição Líquida* de 100% ao mercado.

$$W = \left\{ \mathbf{w} \middle| \begin{array}{l} \mathbf{Iw} \geq \mathbf{L}_b \\ \mathbf{Iw} \leq \mathbf{U}_b \\ \boldsymbol{\Gamma w} \leq \Gamma_{max} \\ [1 \quad \dots \quad 1]\mathbf{w} = 1 \end{array} \right\}$$

Onde,

- W é o conjunto de alocações possíveis que respeitem as restrições lineares;
- $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é matriz identidade;
- $\mathbf{L}_b \in \mathbb{R}^N$ é vetor com os limites inferiores de alocação das classes de ativos;
- $\mathbf{U}_b \in \mathbb{R}^N$ é vetor com os limites superiores de alocação das classes de ativos;
- $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{Z}^N$ é vetor de números inteiros $\epsilon\{0; 1\}$ que indica se a classe de ativos é ilíquida (1) ou líquida (0);
- Γ_{max} é escalar entre 0 e 1 que define a máxima alocação total em classes de ativos ilíquidas.

Nas simulações, a proporção de alocação em uma classe de ativos foi limitada ao intervalo entre 0 e 1, de forma que não foram permitidas alocações negativas. As classes consideradas ilíquidas são tanto dívidas quanto ações de empresas de capital fechado e real estate (PRIV CRED, PRIV EQ e RE). Além disso, o limite máximo do total de alocação em classes ilíquidas considerado foi de 40%.

$$\mathbf{L}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Gamma} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad \Gamma_{max} = 40\%$$

4.2 OS DADOS UTILIZADOS

A partir das séries históricas de retorno foram obtidas estimativas de taxas médias de retorno e de variância utilizadas como parâmetros dos modelos. Estes valores são mostrados na Tabela 4.

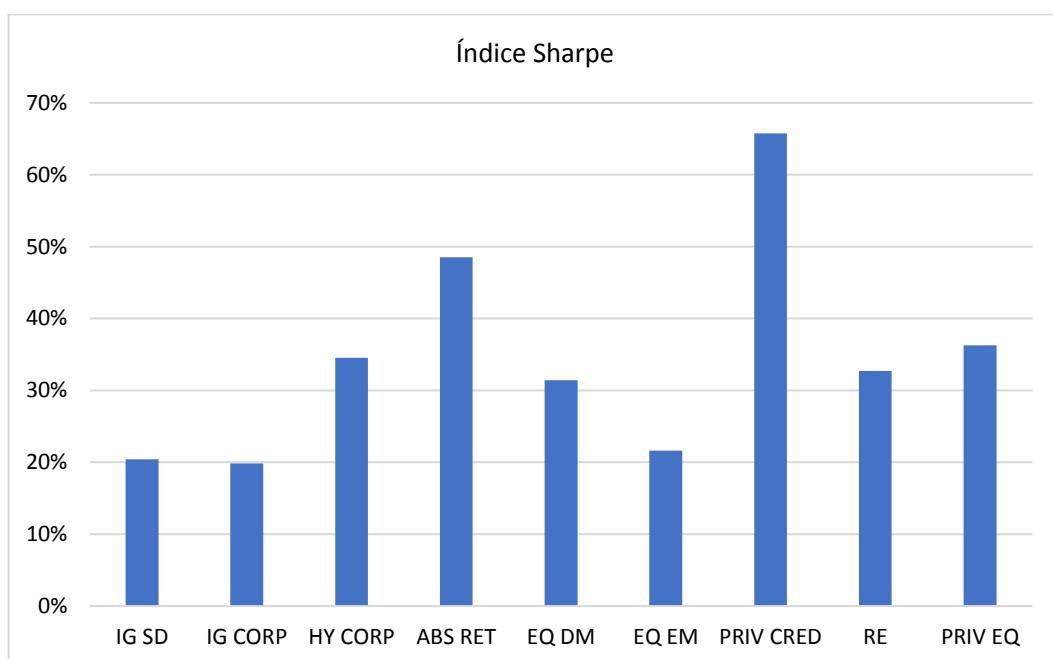
Tabela 4 Taxa de retorno e variância das classes de ativos

Classe de ativos	IG SD	IG CORP	HY CORP	ABS RET	EQ DM	EQ EM	PRIV CRED	RE	PRIV EQ	RF
Taxa de Retorno	3.6%	4.2%	6.2%	6.0%	7.8%	8.5%	10.0%	8.0%	11.8%	3.1%
Volatilidade	2.5%	5.6%	9.0%	6.0%	15.0%	25.0%	10.5%	15.0%	24.0%	0.0%

Fonte: Elaborado pela autora

Na subseção 2.3.4 é descrito que o Índice Sharpe é muitas vezes adotado para a tomada de decisões sobre a alocação de recursos entre diferentes classes de ativos. Desta forma, este indicador foi calculado para os dados da Tabela 4, de forma que o resultado obtido é mostrado no Gráfico 15. À primeira vista, utilizando apenas estes dados, as classes de ativos de retorno absoluto (ABS RET) e de crédito para empresas de capital fechado (PRIV CRED) parecem se destacar.

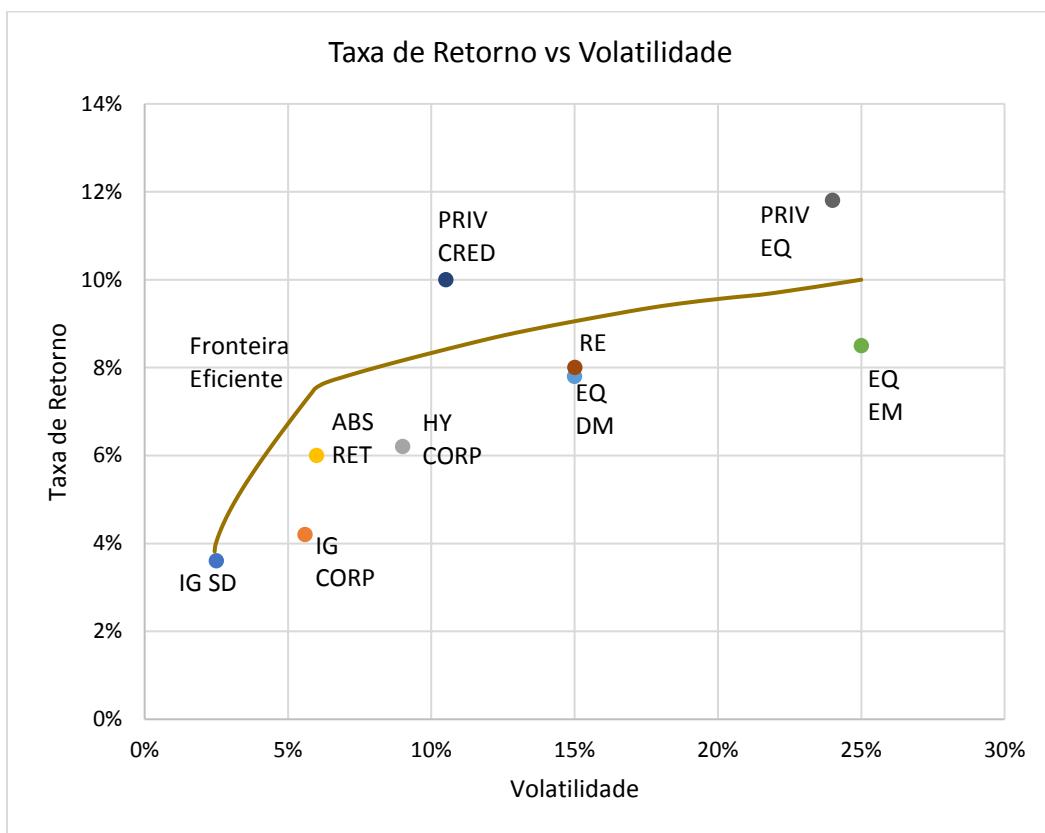
Gráfico 15 Índice Sharpe para as classes de ativos consideradas



Fonte: Elaborado pela autora

Pode-se lembrar, no entanto, que foram descritas limitações de aplicação desta representação em virtude da desconsideração da correlação entre as classes de ativos e da hipótese de relação linear entre retorno excedente e risco. De fato, se os mesmos dados forem observados no plano de representação da fronteira eficiente (vide Gráfico 16) percebe-se que a classe de ativos de retorno absoluto (ABS RET) já não parece tão atrativa, ao contrário de ações de empresas privadas (PRIV EQ), que ganha relevância.

Gráfico 16 Taxa de retorno e desvio-padrão das classes de ativos consideradas contra fronteira eficiente clássica de Markowitz.



Fonte: Elaborado pela autora

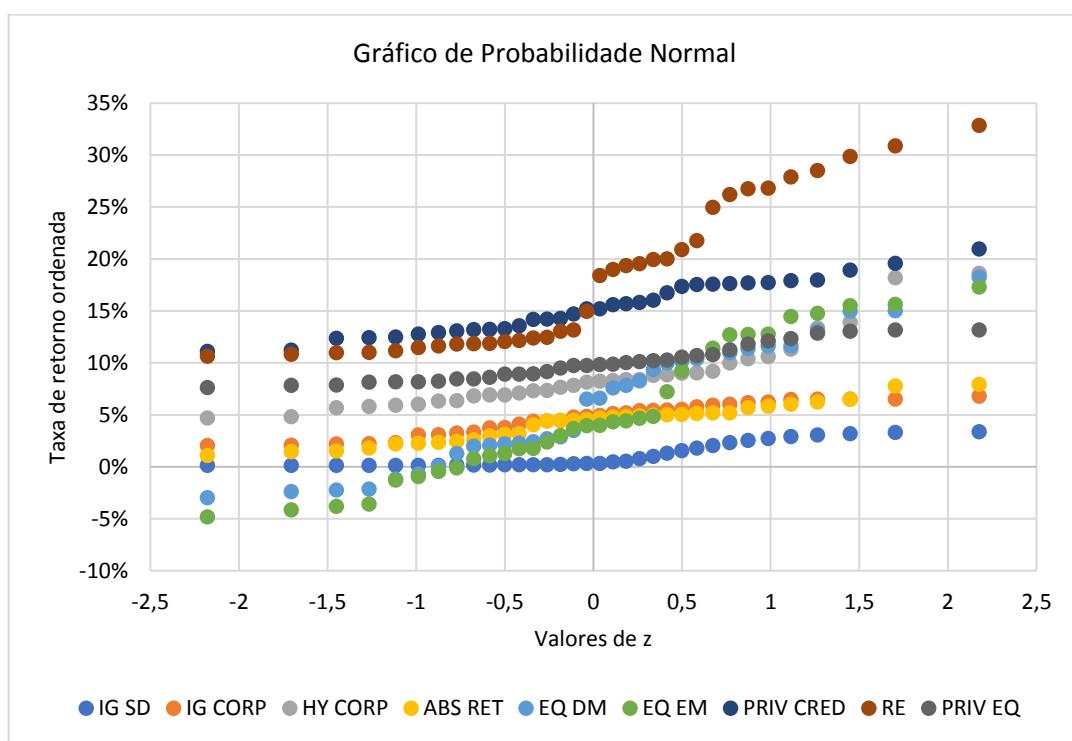
4.3 HIPÓTESES ADOTADAS

Definidos os parâmetros a serem utilizados nos modelos, também é importante verificar se os dados amostrais são aderentes às hipóteses consideradas, conforme descrito na seção 3.6. Entre as hipóteses estão (i) a aproximação das distribuições de taxa de retorno por uma normal multivariada, (ii) a baixa variação da volatilidade entre os intervalos de otimização considerados e (iii) a correlação razoavelmente constante entre as classes de ativos.

4.3.1 Normalidade das taxas de retorno

Muitos dos modelos abordados têm como premissa a distribuição normal de taxas de retorno históricas. Para verificar o nível de aderência da amostra à esta hipótese, os dados de taxa de retorno no intervalo de tempo que se pretende otimizar foram despostos em um Papel de Probabilidade Normal (vide Gráfico 17). Apesar da existência de alguns desvios, pode-se notar que a aproximação através destes parâmetros parece razoável.

Gráfico 17 Papel de probabilidade normal aplicado aos elementos da amostra de cada classe de ativos



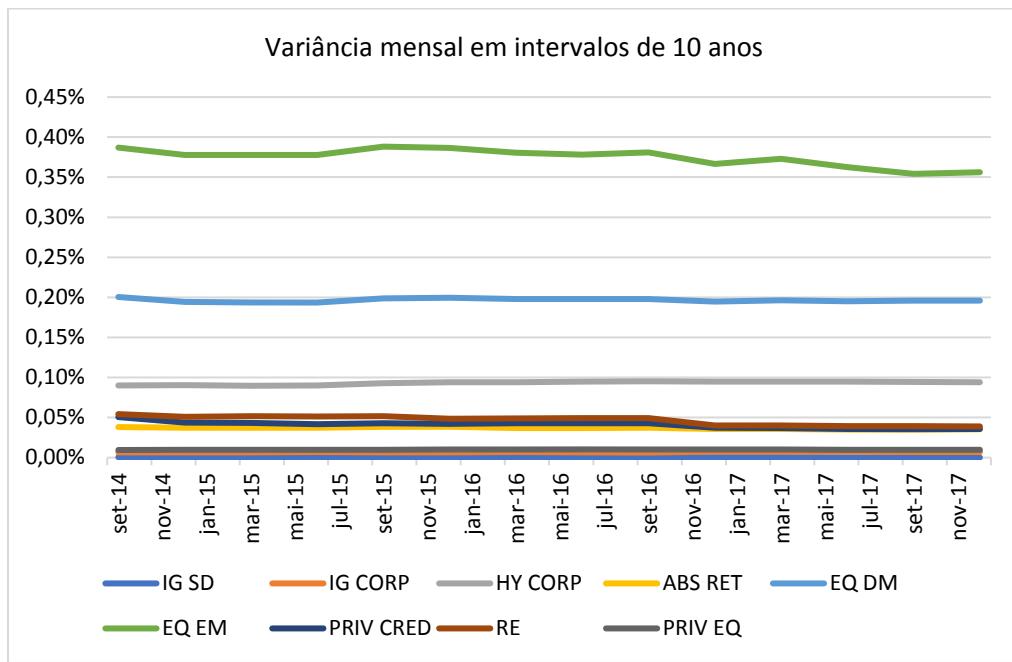
Fonte: Elaborado pela autora

4.3.2 Dispersão de variância

Outra hipótese considerada é a baixa dispersão das métricas de risco entre os intervalos de tempo nos quais pretende-se otimizar o portfólio. Alguns dos modelos abordados consideram a amplitude de flutuação de valor de cada classe de ativos como determinística e constante. Para o caso de a métrica de risco ser a volatilidade, é esperado que a variância de diferentes janelas tenha diferenças pequenas. O Gráfico 18 foi construído através do cálculo da variância de conjuntos de taxas de retornos mensais para cada classe de ativos, considerando uma janela móvel de 10 anos, conforme definido na subseção 4.1.2. De fato, observando-se o Gráfico 18 é

possível notar que parece razoável considerar a variância constante para os intervalos utilizados neste texto.

Gráfico 18 Variância como métrica de risco considerando o intervalo mínimo como um mês e o intervalo de otimização de alocação de 10 anos



Fonte: Elaborado pela autora

4.3.3 A estrutura da correlação

Por fim é verificada a hipótese de correlação aproximadamente constante entre as classes de ativos nos intervalos de otimização considerados (vide Tabela 5). Observa-se que, no caso de alocações com baixa duração e grau de investimento (IG SD), a dispersão da correlação parece elevada. No entanto, se for considerada a baixa taxa de retorno desta classe de ativos, o impacto deste desvio nos resultados dos modelos é menos significativo. Já no caso de Real Estate (RE) esta variância pode ter impacto maior nas soluções, de forma que a correspondência à realidade da hipótese de correlação constante destes fatores pode ser questionada.

Tabela 5 Dispersão da correlação entre as classes de ativos em intervalos de 10 anos

Desvio-padrão do coeficiente de correlação linear	IG SD	IG CORP	HY CORP	ABS RET	EQ DM	EQ EM	PRIV CRED	RE	PRIV EQ
IG SD	0.0%	5.3%	6.6%	15.1%	11.7%	15.2%	12.7%	6.1%	15.6%
IG CORP	5.3%	0.0%	1.1%	2.8%	1.0%	3.4%	1.7%	3.1%	2.8%
HY CORP	6.6%	1.1%	0.0%	2.1%	0.5%	2.5%	2.0%	3.1%	1.3%
ABS RET	15.1%	2.8%	2.1%	0.0%	0.3%	0.5%	2.2%	7.3%	0.8%
EQ DM	11.7%	1.0%	0.5%	0.3%	0.0%	0.6%	1.4%	5.6%	1.3%
EQ EM	15.2%	3.4%	2.5%	0.5%	0.6%	0.0%	3.3%	7.3%	1.0%
PRIV CRED	12.7%	1.7%	2.0%	2.2%	1.4%	3.3%	0.0%	6.5%	2.6%
RE	6.1%	3.1%	3.1%	7.3%	5.6%	7.3%	6.5%	0.0%	6.6%
PRIV EQ	15.6%	2.8%	1.3%	0.8%	1.3%	1.0%	2.6%	6.6%	0.0%

Fonte: Elaborado pela autora

4.4 COMPARAÇÃO DOS MODELOS

Nesta seção pretende-se comparar os resultados gerados pelos diferentes modelos abordados analisando tanto a fronteira eficiente quanto as proporções de alocação dos portfólios considerados ótimos. Primeiramente são aplicadas técnicas de verificação das simulações computacionais, seguidas da análise do desempenho das soluções frente a uma distribuição de taxas de retornos. Por fim, os resultados obtidos são comparados com alocações reais de portfólios de instituições financeiras.

4.4.1 Aplicação de técnicas de verificação das simulações

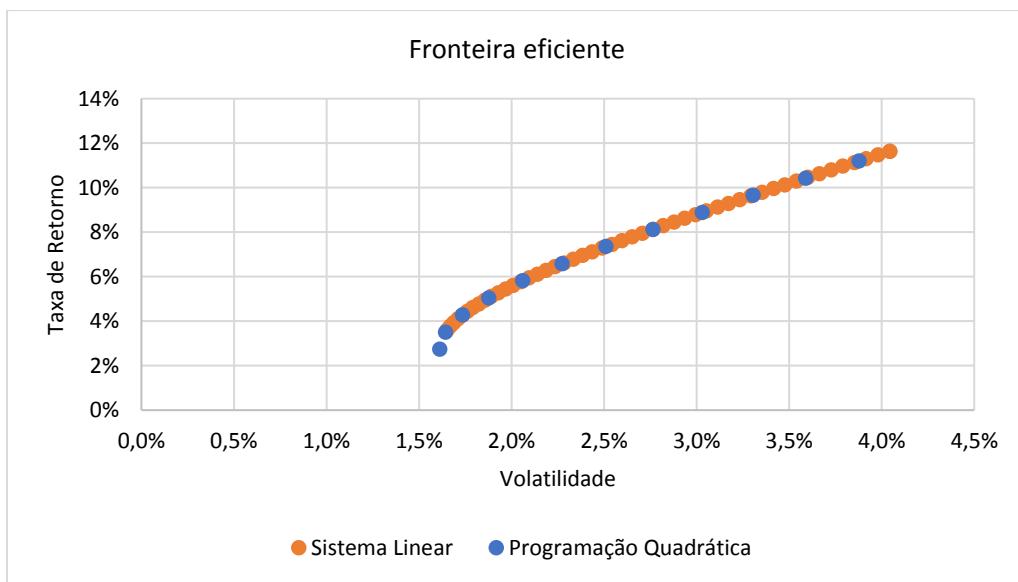
Após a construção de um modelo de simulação computacional é necessário que sejam feitos testes com a finalidade de verificar sua aplicação (Pace, 2004), sob a pena de adoção de resultados incorretos. Assim, as técnicas de verificação pretendem determinar se uma simulação foi construída adequadamente de acordo com as hipóteses do modelo.

Nesta subseção são aplicadas duas técnicas de verificação dos modelos. (i) Em uma delas são comparados resultados de duas resoluções distintas, tal que a condição considerada faz com que a abordagem mais complexa recaia no caso de aplicação do modelo mais simples. Isso pode ser feito comparando os resultados das duas técnicas de resolução abordadas para o modelo clássico de Markowitz (vide seção 3.1), uma delas através de um sistema linear e a outra através de programação linear quadrática. (ii) Pode-se também comparar as diferenças

entre as fronteiras eficientes. Todos os modelos desenvolvidos buscam otimizar o retorno dado um nível limite de risco. Desta forma, é esperado que as fronteiras eficientes dos modelos estejam próximas, ainda que não coincidente devido às diferenças nas métricas adotadas.

A primeira técnica de verificação aplicada pretende comparar os resultados de duas técnicas de resolução distintas para o mesmo modelo, sendo esperado que os resultados sejam coincidentes (Pace, 2004). Para o modelo clássico de Markowitz a solução mais genérica envolve programação linear quadrática. Há, no entanto, uma solução alternativa aplicável em um caso específico. Se as restrições lineares do modelo forem todas de igualdade, é possível descrever o mesmo problema utilizando um sistema de equações lineares. Desta forma, se os parâmetros das simulações estiverem contidos no domínio da aplicação da solução mais simples, o que neste caso implica em ausência de restrições de desigualdade, é esperado que as soluções ótimas coincidam. O Gráfico 19 mostra como, de fato, as fronteiras eficientes comportam-se da maneira esperada. Os resultados para as proporções das alocações encontram-se no Apêndice C.1.

Gráfico 19 Fronteira eficiente das soluções de Markowitz clássicas



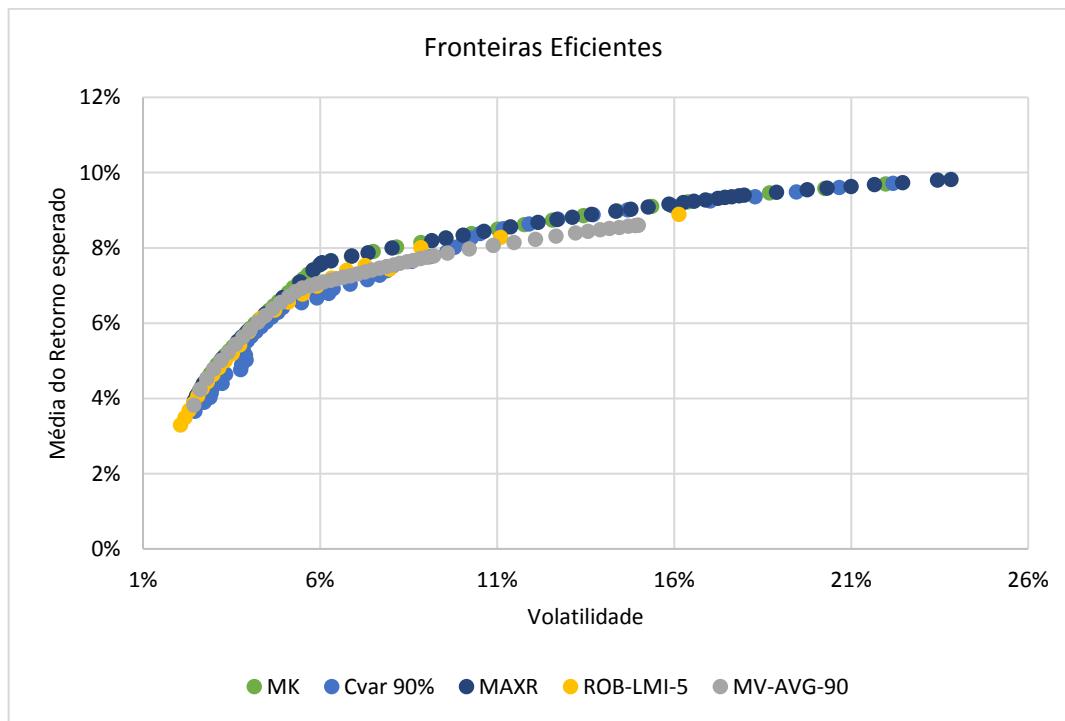
Fonte: Elaborado pela autora

Outra técnica de verificação consiste na comparação de resultados de diferentes modelos que pretendem descrever o mesmo fenômeno (Pace, 2004). Como as hipóteses e os parâmetros variam, não é esperado que os resultados sejam coincidentes, mas que tenham um comportamento similar. Neste texto foram abordados diversos modelos que tem o mesmo objetivo de otimizar a alocação de recursos em diferentes classes de ativos. Cada um deles têm uma métrica de risco e um conjunto de hipóteses distinto, no entanto, através deste teste de

verificação procura-se identificar similaridades entre seus resultados. De fato, as fronteiras formadas pelos portfólios ótimos de cada modelo apresentam grande similaridade, conforme pode ser visto no Gráfico 20, onde:

- MK é gerado através da solução clássica genérica de Markowitz;
- Cvar é gerado através da solução de minimização de Cvar de Rockafellar e Uryasev;
- MAXR é gerado através da solução de Fabozzi (2007);
- ROB-LMI é gerado através da solução robusta de Costa e Paiva (2000);
- MV-AVG é gerado através da solução estocástica de Michaud (1998).

Gráfico 20 Fronteiras eficientes a partir de diferentes modelos



Fonte: Elaborado pela autora

4.4.2 Análise das fronteiras de eficiência

Para a análise dos modelos de otimização de alocação são consideradas duas abordagens: em uma delas é avaliado o desempenho do portfólio e na outra é feita a comparação com alocações reais de instituições financeiras. Nesta subseção é desenvolvida a primeira comparação.

Para isso, os portfólios ótimos resultantes de diferentes abordagens seriam submetidos a taxas de retornos em intervalos ainda não contidos na amostra, de forma que se poderia observar qual alocação teria tido uma maior taxa de retorno. Assim, o ideal seria a consideração

de uma amostra cujos elementos não estão contidos no conjunto utilizado para os cálculos dos parâmetros dos modelos. No entanto, há limites para o número de elementos da nova amostra, uma vez que os índices para algumas classes de ativos são relativamente recentes. Como há limitação histórica no conjunto de dados disponíveis, optou-se pela simulação através da geração de valores aleatórios utilizando a distribuição normal multivariada com os parâmetros obtidos na amostra inicial. Há limitações consideráveis nesta abordagem dado não se trata de dados históricos reais, mas a reprodução de um método que, por si só, já carrega erros.

Para todos os modelos foi simulada uma fronteira eficiente com 50 portfólios ótimos igualmente espaçados em função da variância como métrica de risco. Para nenhuma das abordagens foi considerada a alocação em ativo livre de risco.

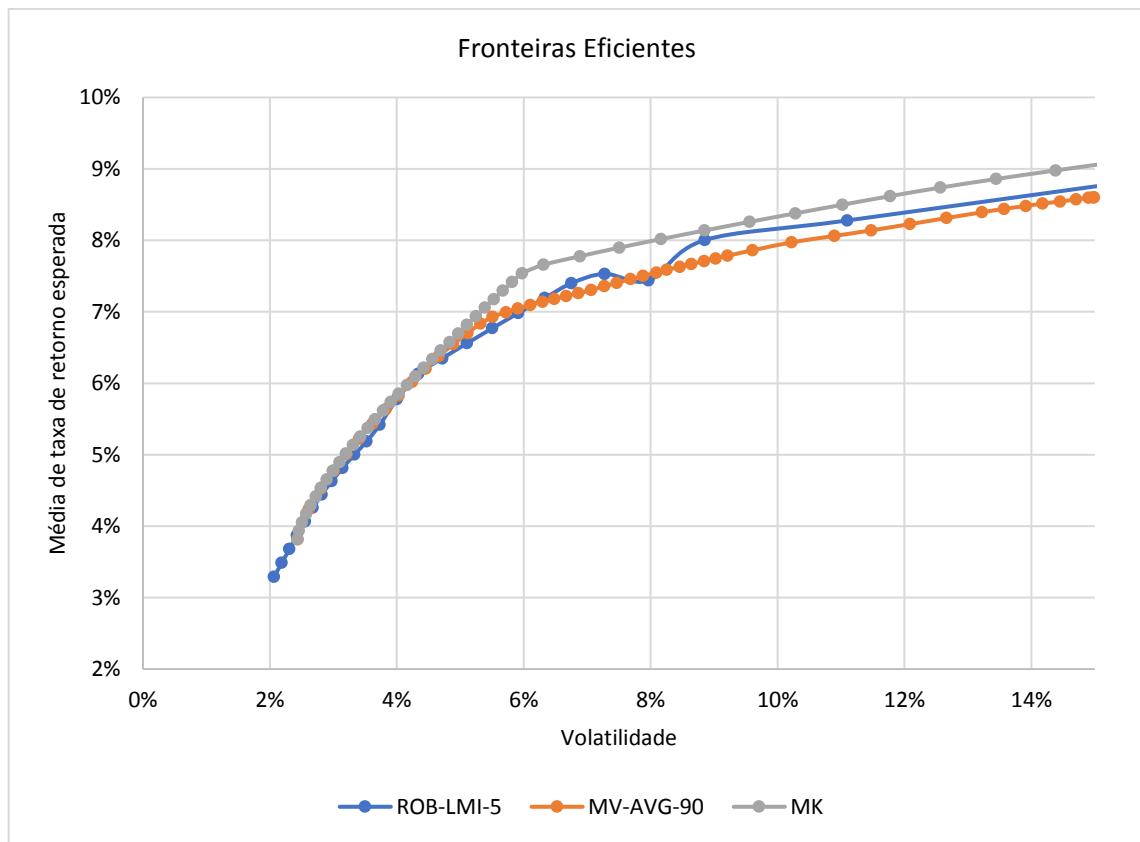
A primeira comparação é feita entre o modelo clássico de Markowitz e as abordagens estocástica e robusta. Desta forma, inicia-se pela descrição dos parâmetros específicos de simulação. No caso do modelo de Michaud a formação de agrupamentos foi baseada em nível de risco, tendo sido desconsideradas 10% das alocações de cada grupo, tidas como extremas. Quanto aos parâmetros de iteração, foram simulados 500 cenários de taxa de retorno, com 50 pontos igualmente espaçados por fronteira eficiente e 50 agrupamentos de níveis de risco. A solução no caso da otimização robusta considerou como parâmetros apenas 1 cenário de covariância e 5 cenários de taxas de retorno, gerados através de simulação de Monte Carlo (vide Apêndice B.4). Na simulação com a abordagem robusta, o aumento do número de cenários considerados eleva consideravelmente a frequência com que ocorrem problemas infactíveis. Desta forma, foi possível considerar apenas um total de 5 cenários de taxa de retorno como parâmetros de incerteza.

Definidos os parâmetros parte-se para a comparação do desempenho das alocações. O modelo de Markowitz define o conjunto de portfólios ótimos para certos valores dos parâmetros de entrada. No entanto, com pequenas alterações destes parâmetros os resultados obtidos originalmente podem se tornar bastante ineficientes. Tanto o modelo de otimização robusta quanto o modelo estocástico pretendem reduzir a sensibilidade dos resultados a pequenos erros nos parâmetros de taxa de retorno de longo prazo das classes de ativos. Desta forma, o portfólio ótimo selecionado por estes métodos não é o ótimo para a média da expectativa de retornos, mas o ótimo com base em um conjunto de retornos distribuídos normalmente ao redor da média. Considere, um cenário hipotético em que na definição dos parâmetros havia incerteza, porém, ao final do intervalo de tempo de longo prazo, observou-se que as médias estimadas se consolidaram. Neste caso específico, o portfólio de melhor desempenho é o de Markowitz clássico. Já os obtidos através de abordagens robusta e estocástica apresentam um desconto de

taxa de retorno resultante. O objetivo desta comparação é verificar o tamanho deste desconto advindo da incorporação de incerteza na definição dos parâmetros. O Gráfico 21 mostra o desempenho dos três conjuntos de portfólios ótimos para o caso de consolidação dos retornos médios estimados. Pode-se observar que, para as condições estudadas, o desconto máximo se limitou a 0.6% de taxa de retorno para todos os níveis de risco.

Como o modelo robusto considera a minimização do pior caso de volatilidade, seria esperado que o desconto observado por conta da incerteza fosse maior que o obtido com o modelo estocástico, que considera a média dos portfólios ótimos. Isso não é evidente no Gráfico 21Error! Reference source not found. por conta da limitação prática do número de cenários considerados no caso da simulação robusta, que totalizou 5 frente a 500 no caso da estocástica. Desta forma, com os parâmetros utilizados, a incerteza nas taxas de retorno de longo prazo para a abordagem robusta foi subestimada em razão de uma limitação prática da aplicação do modelo, associada à alta frequência de situações infactíveis.

Gráfico 21 Fronteiras eficientes para as soluções de Markowitz



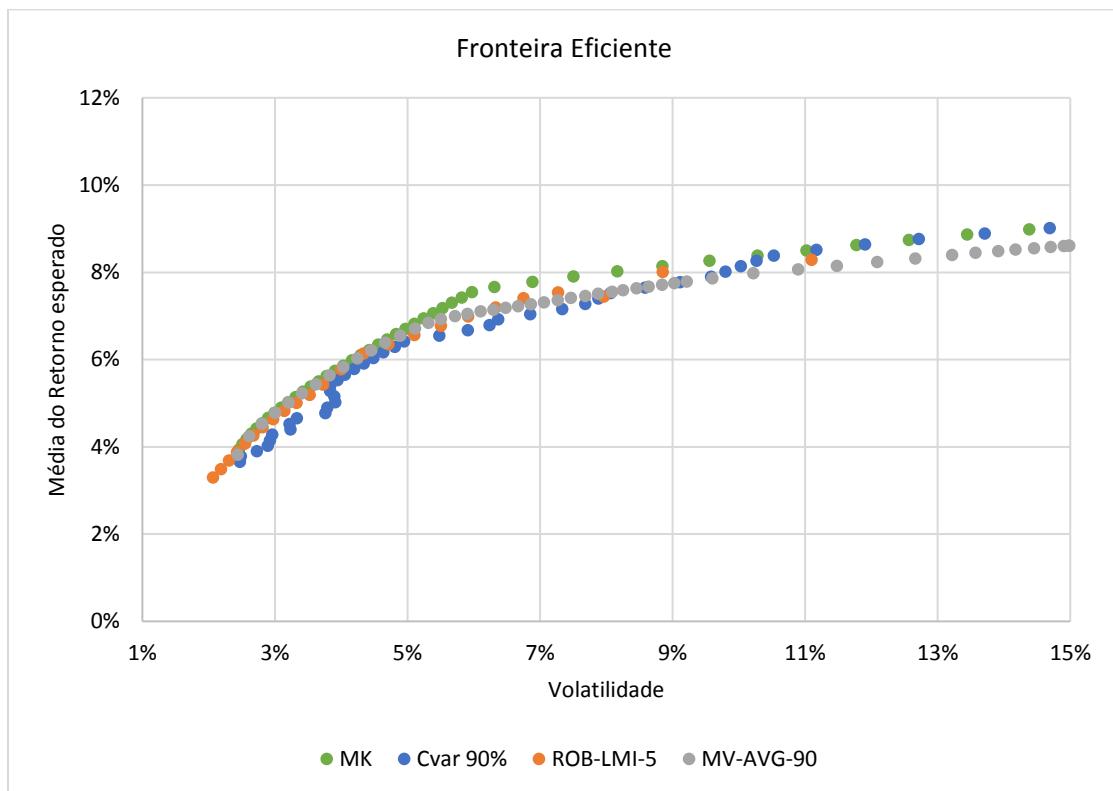
Fonte: Elaborado pela autora

Parte-se, agora, para a análise das soluções propostas pelo modelo de Rockafellar e Uryasev. A simulação considerou a confiabilidade de 90% ($\beta = 10\%$). Neste caso, foi possível

considerar apenas 200 cenários de taxa de retorno por conta da alta demanda de processamento computacional demandada pela solução. No entanto, o impacto desta limitação é bem menos relevante do que a presente na abordagem robusta.

A comparação dos resultados do modelo de Rockafellar e Uryasev com os do modelo de Markowitz depende da percepção de risco do investidor, uma vez que as métricas utilizadas são diferentes. Se para um investidor a percepção de risco é melhor refletida em volatilidade, então o desempenho dos portfólios de Markowitz parecerá melhor (vide Gráfico 22). No entanto, se a interpretação de risco do investidor se aproximar mais do conceito utilizado por CVar, então o desempenho dos portfólios ótimos do modelo de Rockafellar e Uryasev parecerá melhor.

Gráfico 22 Comparativo entre fronteiras eficientes

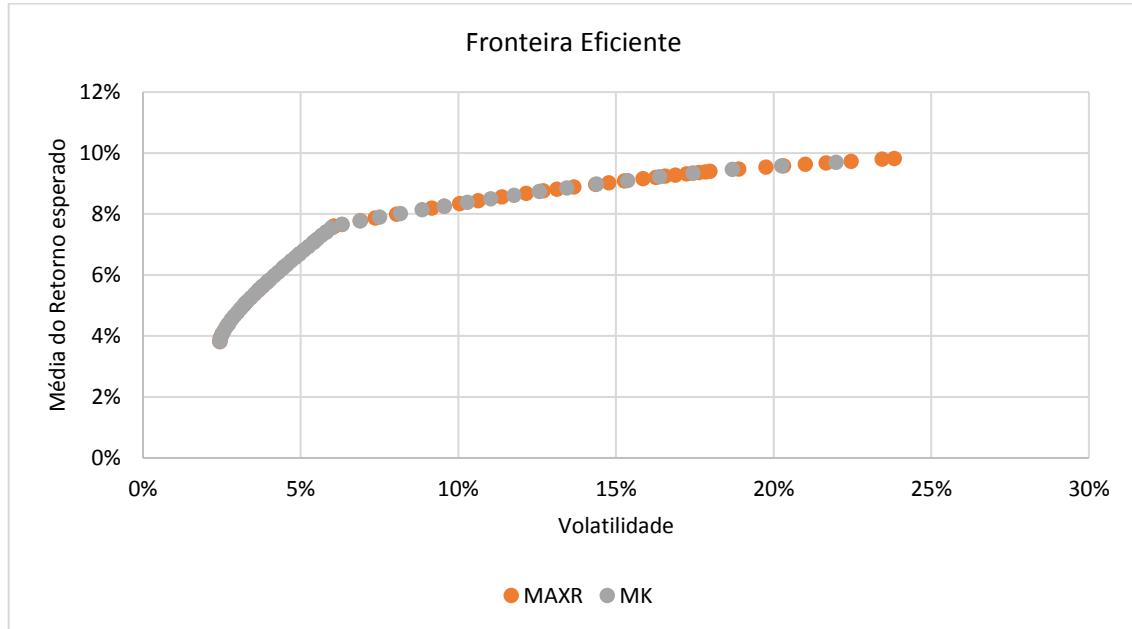


Fonte: Elaborado pela autora

Por fim, são analisadas as soluções propostas pelo modelo de maximização de retorno. A fronteira eficiente gerada por este modelo é similar à de Markowitz clássica (vide Gráfico 23). Há, no entanto, limitações de aplicação da simulação descrita. Para alcançar diferentes níveis de risco, é necessário que se modifique o coeficiente k que representa o desvio máximo permitido para um portfólio (conforme descrito na seção 3.5). Nota-se a princípio que a progressão do retorno e da volatilidade em função do coeficiente k é de difícil representação,

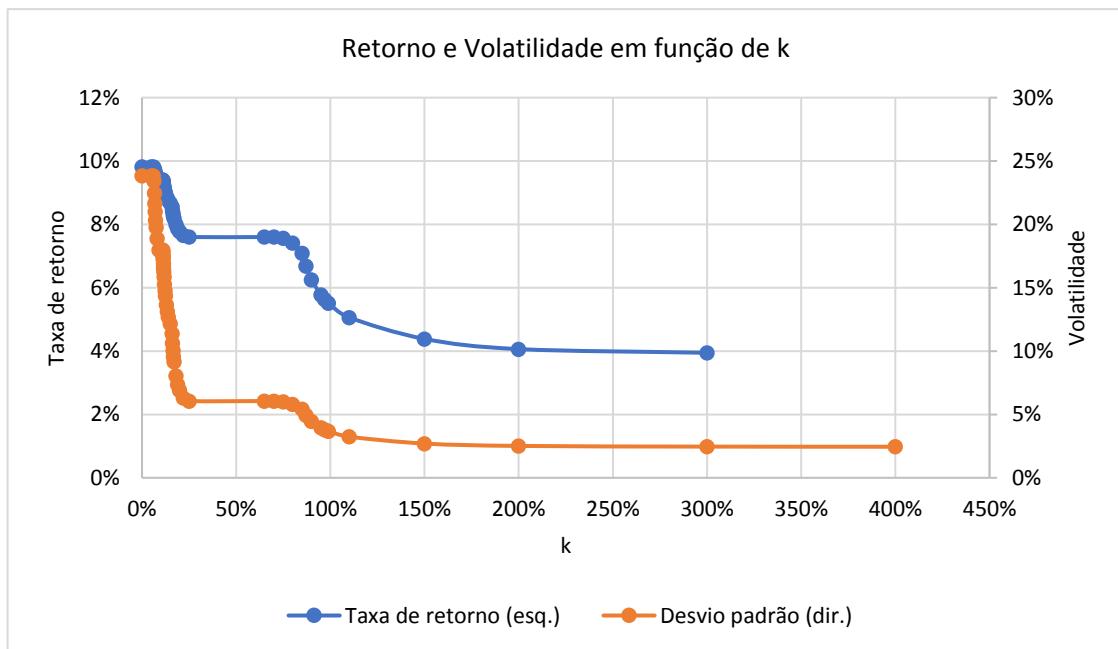
apresentando platôs e regiões de derivada infinita (vide Gráfico 24). Desta forma, torna-se mais difícil a construção de uma fronteira eficiente com uma distribuição homogênea dos pontos.

Gráfico 23 Fronteira eficiente para maximização do retorno e minimização da volatilidade



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 24 Retorno e volatilidade em função de k



Fonte: Elaborado pela autora

4.4.3 Análise comparativa com alocações reais

Nesta subseção é desenvolvida a comparação com alocações reais de instituições financeiras. Esta análise é complementar à anterior, uma vez que ela dá conta de aspectos até então ignorados, como as restrições de mobilidade de alocação entre portfólios com níveis de risco próximos. Isto é, um incremento ou redução pequenos do nível de risco pretendido pelo investidor não podem envolver uma alteração muito drástica das alocações do portfólio, uma vez que na prática há restrições de liquidez para estas movimentações.

Desta forma, a princípio são abordados alguns exemplos de alocação aplicados por instituições que gerenciam portfólios com diferentes classes de ativos, para que algumas características possam ser compreendidas. Em seguida, é realizado o confronto das soluções abordadas neste texto, para que possam ser definidas algumas hipóteses que delimitam a aplicação.

Dentre as instituições que realizam investimento utilizando lógicas de alocação racional destacam-se famílias abastadas, fundos de pensão e *endowments*:

a) Famílias com grandes fortunas podem contratar instituições ou montar escritórios para gerenciar a alocação de seus recursos. Trata-se de um grupo bastante pulverizado com diferentes políticas de investimento e eficiência de portfólio heterogênea.

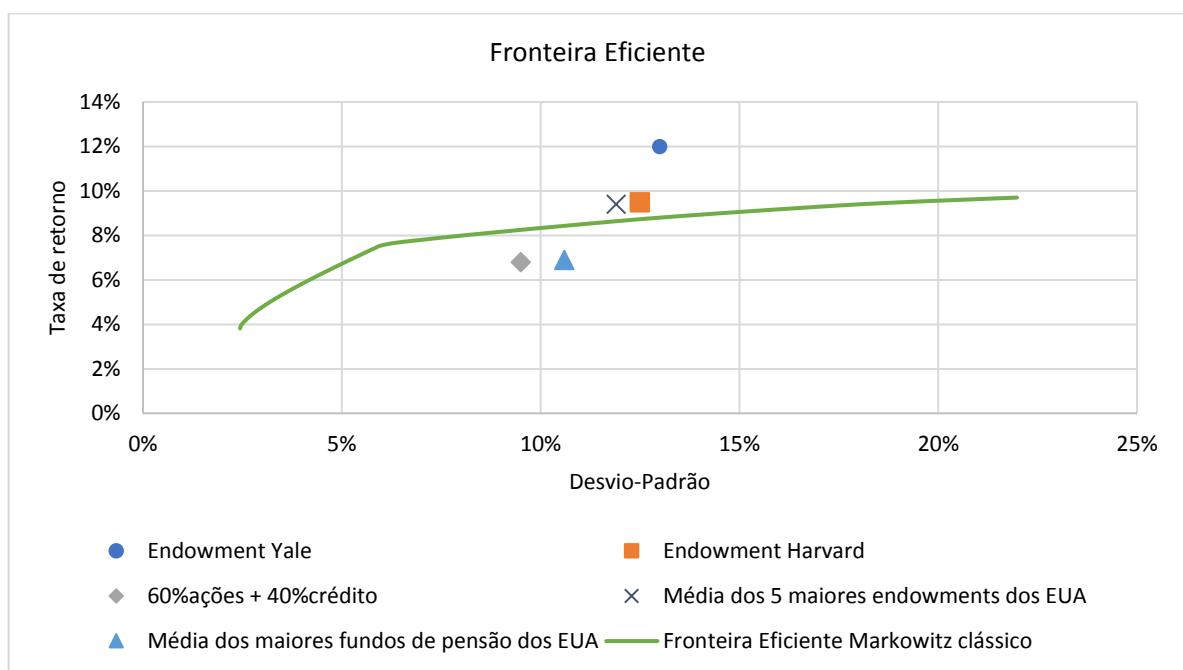
b) Fundos de pensão geralmente concentram recursos de funcionários de instituições públicas ou privadas com a intenção de gerar retorno para a aposentadoria dos contribuintes. Dentre os maiores no Brasil destacam-se Postalis, dos funcionários dos Correios, Funcief, dos funcionários da Caixa Econômica Federal, e Petros, dos funcionários da Petrobrás. Geralmente há normas rígidas que limitam decisões de alocação de recursos e normalmente apresentam eficiência limitada.

c) *Endowments* são instituições que pretendem criar um patrimônio, no limite, perpétuo, como objetivo de gerar recursos continuamente para conservação, expansão e promoção de certa atividade. Isso é feito através de uma alocação racional do recurso. Uma modalidade bastante comum é aplicada por universidades conceituadas estadunidenses, com resultados utilizados como referência para diversos gestores de portfólio.

Neste estudo serão considerados dados de *endowments* de grandes universidades estadunidenses, por conta (i) do volume grande de recursos, que normalmente está mais pulverizado no caso de famílias, (ii) da verdadeira perspectiva de longo prazo e (iii) da existência de maior liberdade de alocação para os gestores, o que geralmente não se verifica no caso de fundos de pensão.

De fato, pode-se observar no Gráfico 25 que o desempenho dos maiores *endowments* se destaca frente a diferentes instituições de alocação de capital. Observando a comparação com a fronteira eficiente de Markowitz, nota-se que há pontos localizados na região infactível, o que resultaria em uma aparente incoerência. Há de se recordar, no entanto, que no caso da taxa de retorno destas instituições o alpha é considerado, assim como outras classes de ativos não discutidas neste texto.

Gráfico 25 Desempenho de instituições de alocação de capital em intervalo de 10 anos contra a fronteira eficiente de Markowitz utilizada neste texto. Crédito é modelado pelo índice Bloomberg Barclay US Agg Bond e Ações é modelado pelo índice S&P500.



Fonte: laborado pela autora com dados de Yale *endowment* (2017) e do terminal Bloomberg

Na Tabela 6 é mostrada a composição do portfólio para o *endowment* de Yale. Uma breve descrição das classes de ativos consideradas por Yale e não abordadas anteriormente no texto está disponível no Apêndice B.7. Pode-se perceber que os recursos se dividem entre diferentes classes de ativos, não havendo alocações extremas em nenhuma delas. Dessa forma, ainda que haja perspectiva menos favorável de longo prazo para algumas classes de ativos, sua alocação no portfólio tende a não ser reduzida a zero. O mesmo se sustenta historicamente para o *endowment* de Yale (Gráfico 26) e para os cinco maiores *endowments* de instituições de ensino dos EUA (vide Apêndice C.2). Duas hipóteses são levantadas para esse comportamento: (i) a dificuldade de levantamento de novas oportunidades de investimento com a rapidez necessária a movimentação entre alocações extremas e (ii) o reconhecimento de certa limitação

dos modelos na identificação de todos os possíveis cenários. Desta forma, é possível que resultados que incluem alocações extremas sejam menos aderentes à realidade de gestão de portfólio em investimentos de longo prazo.

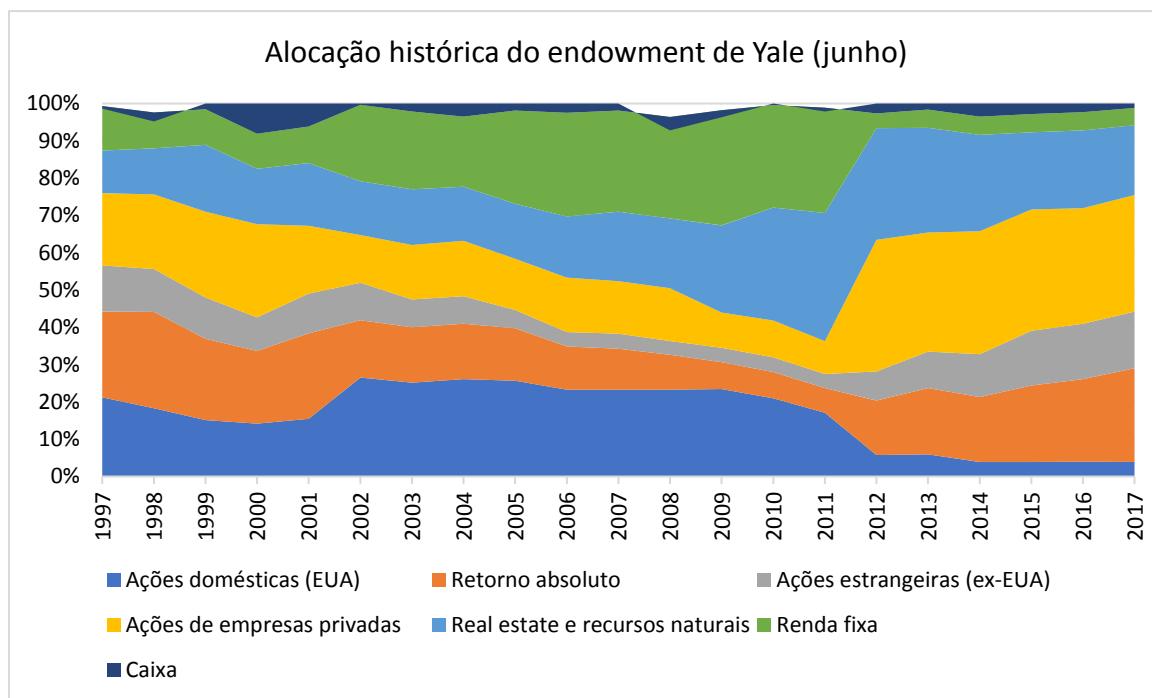
Outra característica importante das soluções em aplicações reais é a limitação da diferença entre portfólios ótimos para níveis de risco próximos. Em situações reais, conforme descrito na subseção 2.3.1, há restrições de liquidez que impedem ou dificultam mudanças bruscas de alocação em curtos intervalos de tempo. Dessa forma, uma possível necessidade de elevação ou redução do nível de risco deve envolver apenas alterações pequenas nas proporções das classes de ativos no portfólio.

Tabela 6 Alocação de recursos entre classes de ativos do endowment da Universidade de Yale.

Classe de Ativos	Alocação (Yale)
Retorno absoluto	25.1%
Ações domésticas (EUA)	3.9%
Renda fixa	4.6%
Ações estrangeiras (ex-EUA)	15.2%
Leveraged Buyouts (ações de empresas privadas)	14.2%
Recursos naturais (real asset)	7.8%
Real Estate (real asset)	10.9%
Venture Capital (ações de empresas privadas)	17.1%
Caixa	1.2%

Fonte: Yale endowment (2017) modificado

Gráfico 26 Alocação histórica entre classes de ativos do endowment de Yale



Fonte: Yale endowment (2017) modificado

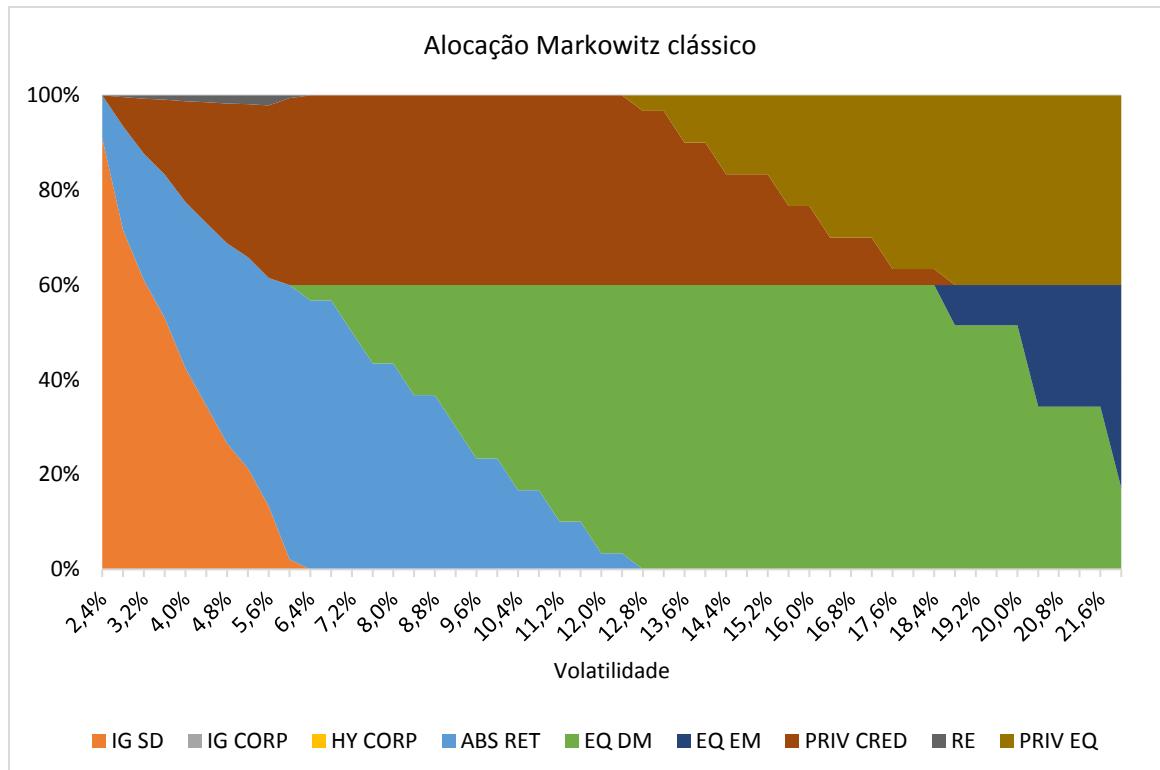
As características identificadas nos portfólios reais destas instituições financeiras são, então, comparadas com as soluções propostas pelos modelos desenvolvidos. Para isso deve-se observar uma volatilidade próxima a 13%, que coincide com o histórico do *endowment* de Yale (conforme já mostrado no Gráfico 25).

Primeiramente é analisado o resultado de alocação do modelo clássico de Markowitz. No Gráfico 27 são mostradas as proporções de alocação dos portfólios sugerido para cada nível de volatilidade. É possível observar que os resultados parecem bastante extremos e instáveis. Isso é, a alocação ótima por esse método envolve poucas classes de ativos e grande sensibilidade a pequenas variações do limite de risco máximo pretendido. No caso do nível de volatilidade histórico do *endowment* Yale (13%) o resultado prevê, ao invés da diversificação observada na Tabela 6, a alocação em principalmente duas classes de ativos, ações de países desenvolvidos (EQ DM) e crédito a empresas de capital fechado (PRIV CRED).

Esse comportamento é consequência, sobretudo, da consideração de taxas de retorno determinísticas para as classes de ativos em intervalos de longo prazo. Conforme visto anteriormente, há um grande impacto desta premissa nos resultados de alocação considerando a sensibilidade do modelo a variações deste parâmetro. Dessa forma, a aplicação de seus resultados é limitada para o caso abordado.

Portanto, a aplicação deste modelo parece ser mais adequada em casos nos quais (i) há pouca incerteza das taxas de retorno de longo prazo das classes de ativos, (ii) há facilidade e rapidez na execução de mudanças grandes de proporções de alocação de um portfólio e (iii) a distribuição das taxas de retornos históricas se aproximam da distribuição de probabilidade normal.

Gráfico 27 Portfólios ótimos para diferentes limites de risco obtidos através da resolução clássica de Markowitz

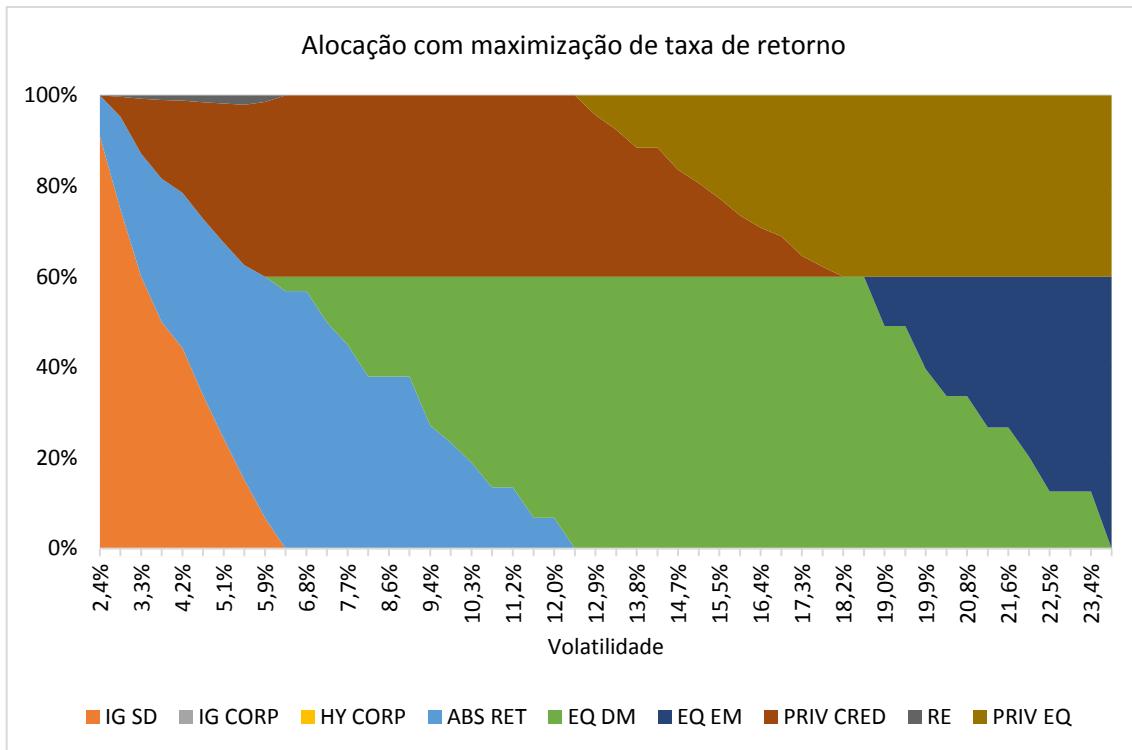


Fonte : Elaborado pela autora

A mesma análise é agora aplicada para as sugestões de alocação obtida através do modelo de maximização do retorno. O resultado (vide Gráfico 28) é bastante similar ao clássico de Markowitz. Destaca-se, no entanto, que há limitações importantes de aplicação desta abordagem, entre elas a dificuldade de obtenção de resultados igualmente espaçados para a fronteira eficiente e hipótese de retornos determinísticos para as classes de ativos.

Desta forma, este modelo é adequado para os casos em que (i) a incerteza de taxas de retorno futura das classes de ativos é pequena, (ii) a eficiência de simulação computacional não é um requisito essencial, (iii) há facilidade em mudanças extremas de alocação do portfólio e (iv) distribuição das taxas de retorno pode ser aproximada por curvas normais.

Gráfico 28 Alocações entre as classes de ativos para diferentes níveis de risco com o modelo de maximização da taxa de retorno



Fonte: Elaborado pela autora

Parte-se, então, para a análise da alocação de abordagens que consideram incerteza nas taxas de retorno de longo prazo das classes de ativos.

No Gráfico 29 é mostrado o resultado de alocação do modelo de otimização robusta para diferentes níveis de risco. É possível perceber que os portfólios distribuem a alocação em um número maior de classes de ativos. Na volatilidade do portfólio do *endowment* de Yale (13%), há investimento em retorno absoluto (ABS RET), ações de mercados emergentes (EQ EM), crédito de empresas de capital fechado (PRIV CRED) e ações de empresas de capital fechado (PRIV EQ).

No entanto, algumas transições de portfólios entre níveis de volatilidade diferentes ainda são bastante bruscas. Esse é o caso da substituição total entre ações de mercados desenvolvidos (EQ DM) e ações de mercados emergentes (EQ EM) próximo ao nível de volatilidade máxima de 11%. Isso se dá, sobretudo, pela limitação de cenários considerados pelo modelo, o que leva à priorização de alocações mais extremas. Conforme discutido anteriormente, a abordagem considera minimização da volatilidade do pior caso entre a combinação linear dos cenários parametrizados, o que pode ser considerado bastante conservador. Dessa forma, a ampliação do número de cenários leva a alocações com descontos importantes de retorno em relação ao portfólio clássico de Markowitz. Mesmo que se opte pelo aumento do número de cenários

considerados, a resolução pode se tornar praticamente inviável em virtude do aumento da frequência de ocorrência de problemas infactíveis.

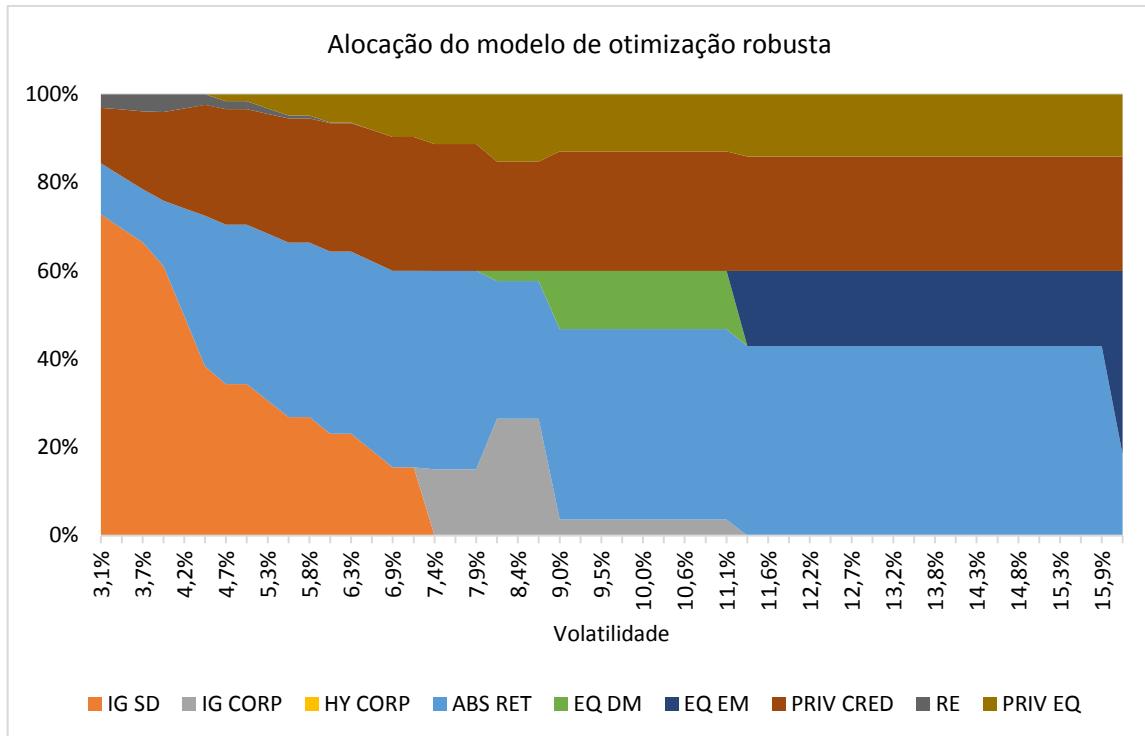
Dessa forma, este modelo parece ter um desempenho melhor nos casos nos quais (i) há maior preocupação em preservação de valor e não necessariamente ampliação de ganhos, (ii) o comportamento histórico das taxas de retorno pode ser representado por um conjunto pequenos de cenários de retorno e (iii) a distribuição das taxas de retornos históricas se aproximam da distribuição de probabilidade normal.

Já abordagem de Michaud (vide Gráfico 30) apresenta transições mais graduais de alocação entre portfólios com níveis de volatilidade próximos. Além disso, há distribuição da proporção das alocações dos portfólios em muitas das classes de ativos. No mesmo nível de volatilidade do portfólio do *endowment* de Yale (13%), há investimento em todas as classes de ativos consideradas. Desta forma, o modelo de Michaud é o que mais se aproxima das características observadas nos portfólios reais de instituições financeiras.

A abordagem estocástica apresenta uma vantagem importante ao definir um conjunto de portfólios para cada nível de volatilidade. Desta forma, é possível definir não apenas um portfólio, mas um intervalo de alocação otimizado, de forma que podem ser feitos pequenos ajustes de alocação sem o risco de afastamento muito relevante do ponto eficiente. Isso é bastante relevante se for considerada a necessidade de rebalanceamento e alocação tática de portfólio, conforme discutido na subseção 2.3.7.

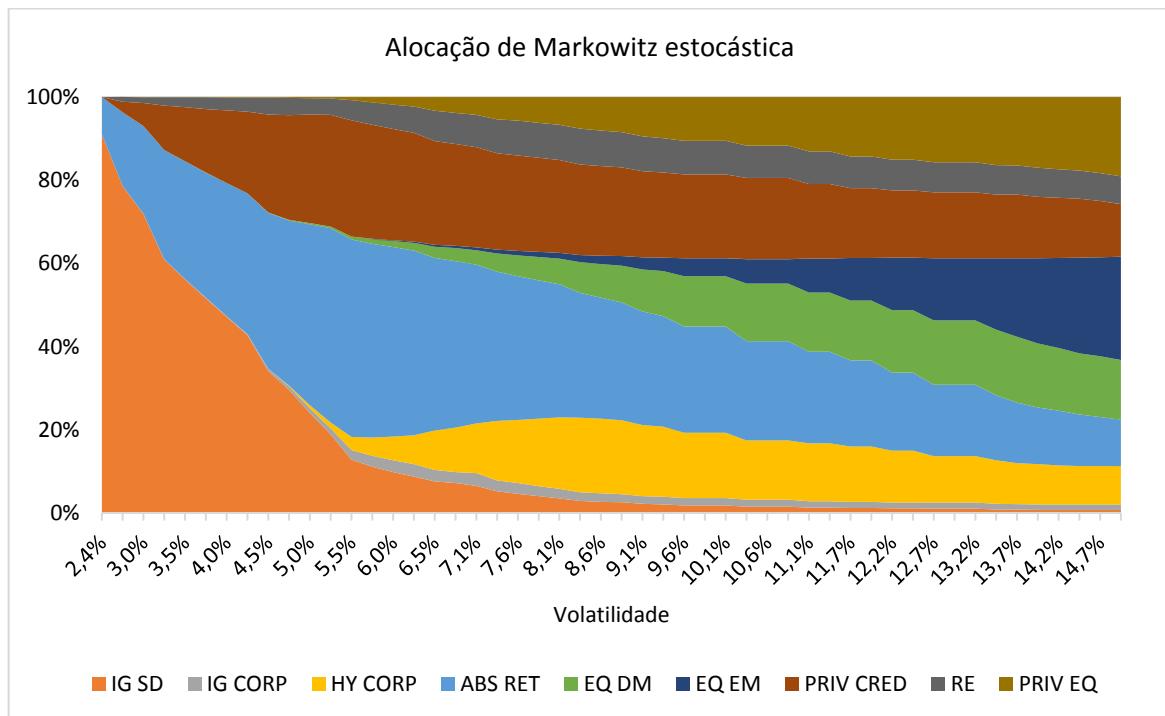
Desta forma, esta abordagem parece ter desempenho melhor quando (i) há incerteza considerável, mas limitada das taxas de retorno de longo prazo das classes de ativos, (ii) investimento demandam tempo para realocação e (iii) a distribuição do histórico de taxas de retorno das classes de ativos se aproxima de distribuições normais de probabilidade.

Gráfico 29 Alocação entre classes de ativos obtida através da abordagem de otimização robusta



Fonte: Elaborado pela autora

Gráfico 30 Portfólios médios para diferentes níveis máximos de risco considerando a abordagem estocástica



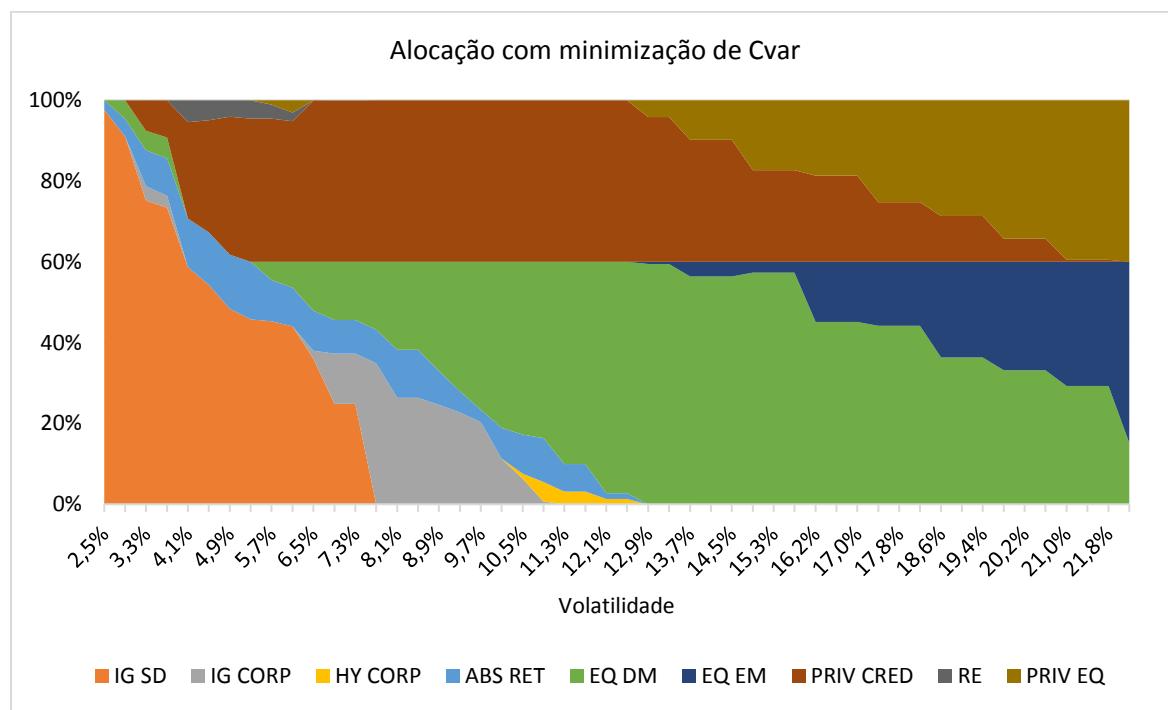
Fonte: Elaborado pela autora

Por fim, o modelo de Rockafellar e Uryasev gera as sugestões de alocação mostradas no Gráfico 31. Apesar de haver maior distribuição de investimento entre as classes de ativos se comparado com o modelo clássico de Markowitz, ainda há afastamento importante das características identificadas nas aplicações reais. No nível de volatilidade do portfólio do *endowment* de Yale (13%) a alocação se concentra somente em duas classes de ativos: ações de países desenvolvidos (EQ DM) e crédito de empresas de capital fechado (PRIV CRED). As transições entre portfólios de níveis de volatilidade próximos são mais bruscas que as obtidas no modelo de Michaud.

Cabe ressaltar também que a simulação se torna menos eficiente com o aumento do número de cenários. A limitação não é tão grande quanto no caso da abordagem de otimização robusta, de forma que um número considerável de parâmetros pode ser utilizado, o que, no entanto, implicou no aumento significativo do tempo de processamento do computador utilizado.

Desta forma, este modelo é aplicável para os casos em que (i) a distribuição histórica de taxas de retorno não pode ser aproximada por uma normal, (ii) há relativa flexibilidade na mudança de alocação de recursos e (iii) o comportamento das taxas de retorno históricas pode ser representado por um número limitado de cenários.

Gráfico 31 Alocação entre as classes de ativos dos portfólios ótimos para modelo de minimização de Cvar



Fonte: Elaborado pela autora

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo comparar diferentes modelos descritos na literatura para a otimização da alocação de recursos em horizontes de longo prazo. Dado que a solução clássica de Markowitz apresenta limitações importantes de aplicações em casos reais, foram consideradas alternativas, a saber: um modelo que utiliza processos estocásticos, um modelo de otimização robusta, um modelo de minimização de CVar e um modelo de maximização de retorno.

Primeiramente foi necessária a construção de uma fundamentação teórica para que as métricas de comparação de diferentes portfólios pudessem ser definidas. Desta forma, foram descritos conceitos como risco, retorno, liquidez, classes de ativos e fronteira eficiente.

Posteriormente os modelos de otimização abordados neste trabalho de formatura foram descritos e suas hipóteses discutidas. Cada uma das alternativas foi implementada com o auxílio de ferramentais de simulação computacional (Scilab).

Pôde-se, então, definir as classes de ativos utilizadas e os parâmetros de entrada de cada um dos modelos para que as simulações fossem executadas. Aos resultados foram aplicados testes de verificação a fim de garantir que a construção foi feita de maneira correta.

Os portfólios sugeridos pelos diferentes modelos foram submetidos a condições de taxas de retorno simuladas, tal que se pudesse comparar o desempenho de cada um deles. Para complementar esta análise também foi realizado o confronto das soluções obtidas com alocações reais de instituições financeiras.

Aplicando tais procedimentos foi possível identificar que a abordagem de Michaud obteve resultados bastante aderentes a portfólios considerados eficientes. Dessa forma, muitos destes conceitos foram utilizados para embasar a construção do modelo que já encontra aplicações reais de apoio à tomada de decisão na empresa em que o programa de estágio se desenvolveu.

Sugere-se como proposta de continuidade do presente trabalho a consideração de modelos mais complexos para a melhoria da descrição da relação entre os retornos das classes de ativos. Estes modelos poderiam ser aplicados tanto nas simulações de Monte Carlo utilizadas quanto na melhoria do cálculo de risco resultante de um portfólio.

Outra possível continuidade deste trabalho de formatura refere-se à incorporação de outros fatores que influenciam o comportamento das classes de ativos. Isto é, medidas como taxa de juros e crescimento econômico, por exemplo, apesar de não necessariamente serem

alvos diretos de investimento, podem contribuir para a redução da incerteza da expectativa de taxas de retorno das alocações de longo prazo.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGUILAR, Omar; WEST, Mike. **Bayesian dynamic factor models and variance matrix discounting for portfolio allocation.** Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University, 1998.
- ALEM, Douglas; MORABITO, Reinaldo. **Planejamento da produção sob incerteza: programação estocástica versus otimização robusta.** Gestao da Produçao, v. 22, n. 3, p. 539-551, 2015.
- ARTZNER, Philippe et al. **Coherent measures of risk.** Mathematical finance, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.
- AZLEN, Michael. **Investing Like the Harvard and the Yale Endowment Funds.** Frontier Investment Management LLP, 2017.
- BLOOMBERG MARKETS. Disponível em <<http://www.bloomberg.com/markets>>. Acesso em 30 de março de 2018.
- BRAZENOR, Richard. **Investing Like the Harvard and Yale Endowment Funds.** Advisor Perspective, p. 1, 2008.
- CAPELLETTO, Lucio Rodrigues; DE OLIVEIRA, Jaildo Lima; CARVALHO, L. Nelson. **Aspects of hedge accounting not implemented in Brazil.** Revista de Administração, v. 42, n. 4, p. 511-523, 2007.
- COSTA, O. L. V.; PAIVA, A. C. **Robust portfolio selection using Linear-matrix inequalities.** Journal of Economic Dynamics and Control, v. 26, 2002.
- COSTA, Oswaldo LV et al. **Robust portfolio optimization for electricity planning: An application based on the Brazilian electricity mix.** Energy Economics, v. 64, p. 158-169, 2017.
- COX, John C.; INGERSOLL JR, Jonathan E.; ROSS, Stephen A. **Duration and the measurement of basis risk.** Journal of business, 1979.
- DEVORE, Jay L. **Probabilidade e estatística para engenharia e ciências.** Cengage Learning Edições Ltda., 2010.
- DE SOUZA, Nali de Jesus; FELDENS, Aray Miguel. Introdução à economia. Editora Atlas, 1996.
- EMBRECHTS, Paul; LINDSKOG, Filip; MCNEIL, Alexander. **Modelling dependence with copulas.** Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich, 2001.
- FABOZZI, Frank J. et al. **Robust portfolio optimization and management.** John Wiley & Sons, 2007.

FOCARDI, Sergio M. et al. **Clustering economic and financial time series: Exploring the existence of stable correlation conditions.** Discussion Paper, 2001.

FORGHIERI, Simone. **Portfolio Optimization using CVar.** Libera Università Internazionale Degli Studi Sóciali, 2013.

HUBER, Peter J. **Robust statistics.** In: International Encyclopedia of Statistical Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.

JOE, H. **Multivariate Models and Dependence Concepts.** Chapman & Hall, 1997

JONDEAU, Eric; ROCKINGER, Michael. **The copula-garch model of conditional dependencies: An international stock market application.** Journal of international money and finance, v. 25, n. 5, 2006.

LUENBERGER, David G. et al. **Investment science.** OUP Catalogue, 1997.

MARCHETTI, Domingos. **Introdução à física dos processos estocásticos.** FMA 427 IFUSP, 2009.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio selection.** The journal of finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952.

MICHAUD, Richard O. **Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation.** Oxford University Press, 1998.

NAWROCKI, D; CUMOVA, D. **A symmetric LPM model for heuristic mean-semivariance analysis.** Journal of Economics Business, 2010.

NELSEN, R. **An Introduction to Copulas.** Lecture Notes in Statistics 139. New York, USA: Springer-Verlag, 1999.

OLIVEIRA, Lucas L.. **Análise da matriz de geração de energia no Brasil: uma aplicação da teoria de portfólios.** À Escola Politécnica da USP para obtenção do título de Mestre em Ciências, 2017.

PACE, D.K., **Modelling and simulation and verification challenges.** Johns Hopkins Applied Technical Digest, v.25, 2, 2004, p.163-172.

PFLUG, Georg Ch. **Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk.** In: Probabilistic constrained optimization. Springer, Boston, MA, 2000.

PREQIN. **Prequin Special Report: Investors in US-Based Hedge Funds,** 2014. Disponível em <<https://bit.ly/2zbmEwT>>. Acesso em 2 de outubro de 2018.

REIS, Rachel. **Applications of Second Order Cone Programming.** À faculdade de ciências da Universidade do Porto para título de mestrado, 2013.

RICCETTI, Luca. **A copula–GARCH model for macro asset allocation of a portfolio with commodities.** Empirical Economics, v. 44, n. 3, 2013.

ROCKAFELLAR, R. Tyrrell et al. **Optimization of conditional value-at-risk.** Journal of risk, v. 2, 2000.

ROMAN, D; MITRA, G. **Portfolio selection models: a review and new directions.** Wilmott Journal, 2009.

SHARPE, William F. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. The journal of finance, v. 19, n. 3, 1964.

SHARPE, William F. **The sharpe ratio.** Journal of portfolio management, 1994.

SILVA, Paulo J. S. **Programação Não Linear.** Notas de Aula de MAC0427 IME-USP, São Paulo, 2005.

WIPPLINGER, Evert. Philippe Jorion: **Value at Risk-The New Benchmark for Managing Financial Risk.** Financial Markets and Portfolio Management, 2007.

ENDOWMENT DE YALE. **Endowment Report.** Disponível em <<http://investments.yale.edu/>>. Acesso em 19 de outubro de 2018.

APÊNDICE A

Neste capítulo são expostos os códigos em Scilab utilizados para a execução das simulações computacionais.

A.1 SOLUÇÃO DE SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

<pre> //-----Inputs----- from=0.0 //min return to=2.8/100 //max return incr=0.0001 //incremento para return dim=8 // numero de asset classes //-----Conexao com Excel----- [fd,SST,Sheetnames,Sheetpos] = xls_open('C:\Users\User\Desktop\Dados_Resultados_Modelo.xls') [Value,TextInd] = xls_read(fd,Sheetpos(1)); mclose(fd) avgret=from ; M=[] while avgret <= to //-----construção matriz A----- for i=1:dim for j=1:dim A(i,j)=Value(6+i,2+j) end; A(i,dim+1)=-Value(3,2+i) A(i,dim+2)=-1.0 b(i)=0 A(dim+1,i)=Value(3,2+i) A(dim+2,i)=1.0 end; </pre>	<pre> for i=(dim+1):(dim+2) for j=(dim+1):(dim+2) A(i,j)=0.0 end end b(dim+1)=-avgret b(dim+2)=-1.0 //-----Linear solver----- [x0,kerA]=linsolve(A,b) avgret=avgret+incr M=[M;x0.'] end //-----create csv file----- csvWrite(M,'C:\Users\User\Desktop\result_markshort.csv') </pre>
---	--

A.2 SOLUÇÃO DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

<pre> //-----Conexao com Excel----- [fd,SST,Sheetnames,Sheetpos] = xls_open('C:\Users\User\Desktop\Dados_Resultados_Modelo.xls') [Value,TextInd] = xls_read(fd,Sheetpos(1)) mclose(fd) //-----Construcao Matriz----- M=[] for i=1:dim C(1,i)=Value(3,2+i) C(2,i)=1.0 ; ci(i)=0.0 ; cs(i)=1.0 ; p(i)=0.0 for j=1:dim Q(i,j)=Value(i+6,j+2) end end C=[C;[0,0,0,0,1,1,1]] ; b(2)=1 ; b(3)=illiqmax ; me=2 //-----Calculo Ini e Fim----- ini=min(C(1,:)) max1=0.0; max2=0.0 min1=max(C(1,:)) ; min2=max(C(1,:)) </pre>	<pre> for i=1:3 if min1 > C(1,i+5) then min1 = C(1,i+5) end if max1 < C(1,i+5) then max1=C(1,i+5) end end for i=1:5 if max2 < C(1,i) then max2=C(1,i) end if min2 > C(1,i) then min2=C(1,i) end end fim= max((illiqmax * max1) + ((1-illiqmax) * max2),max2) ini=min((illiqmax * min1) + ((1-illiqmax) * min2),min2) avgret=ini+incr while avgret <= fim b(1)=avgret [x0,iact,iter,f]=qpsolve(Q,p,C,b,ci,cs,me) M=[M;x0.'] avgret=avgret+incr end </pre>
---	--

A.3 SOLUÇÃO DE PROGRAMAÇÃO CVAR

<pre> rand("seed",getdate('s')) ; rand("normal") function y=retornos(NClass, NRet, LTM, R) //gera NRet conjuntos de retornos equiprováveis com NClass classes de ativos for h=1:NRet for i=1:NClass z(i)=rand() end for i=1:NClass aux=0.0 for j=1:NClass aux=aux+LTM(i,j)*z(j) end aux=aux+R(i) R_der(h,i)=aux end y=R_der endfunction //geração de conjuntos de retornos equiprováveis LTM=choleskey(Ach,NClass) R_der=retornos(NClass,NVar,LTM,R) //equality constraints: sum(wi)=1 beq=[1.0] ; Aeq(1:NClass)=1.0*ones(NClass,1) Aeq(NClass+1:(NClass+NVar+1))=0.0*ones(NVar+1,1) //fo inputs: alpha+avg(z)/(1-beta) C(1:NClass)=0.0*ones(NClass,1)//weights C(NClass+1)=1.0//alpha C(NClass+2:(NClass+NVar+1))= (1/((1-vbeta)*NVar))*ones(NVar,1)//z //inequality constraints //return: sum(wi*ri)>=R for i=1:NClass Aineq(1,i)=-mean(R_der(:,i))end Aineq(1,NClass+1:(NClass+NVar+1))=0.0*ones(1,NVar+1) //liquidity: sum(w illiq)<=illiqmax Aineq(2,1:NClass)=Value(18,4:(NClass+3)) Aineq(2,NClass+1:(NClass+NVar+1))=0.0*ones(1,NVar+1) bineq(2)=illiqmax //zi+sum(rjwj)-alpha<=0 Aineq(3:(2+NVar),1:NClass)=R_der Aineq(3:(2+NVar),NClass+1)=-1.0*ones(NVar,1) Aineq(3:(2+NVar),(NClass+2):(NClass+1+NVar))= eye(NVar,NVar).*(-1) bineq(3:(2+NVar))=0.0*ones(1,NVar) //limites de alocação //Ub e Lb ALim(1:NClass,1:NClass)=eye(NClass,NClass) ALim((NClass+1):(2*NClass),1:NClass)= (-1)*eye(NClass,NClass) ALim(1:(2*NClass),(NClass+1):(NClass+1+NVar))= zeros(2*NClass,NVar+1) bLim(1:NClass,1)=Value(16,4:(NClass+3)).' bLim((NClass+1):(2*NClass),1)=(- 1)*Value(17,4:(NClass+3)).' </pre>	<pre> //zi: zi>=0 ALim([(2*NClass+1):(2*NClass+NVar),(NClass+2):(NClass+NVar)])= (-1)*eye(NVar,NVar) ALim([(2*NClass+1):(2*NClass+NVar),1:(NClass+1)])= zeros(NVar,NClass+1) bLim([(2*NClass+1):(2*NClass+NVar),1])=zeros(NVar,1) //ponto minimo risco [xmin,cvar_min,ehsol]= karmarkar(Aeq.',beq, [],[],[],[],[Aineq(2:(2+NVar),:)]); ALim], [bineq(2:(2+NVar),:)];bLim]) ini=R*xmin(1:NClass) //ponto de maximo retorno [retorno ; cs ; illiq ; retorno ; ci] matriz(1,1:NClass)=(-1)*Aineq(1,1:NClass)//retorno matriz(2,1:NClass)=Value(16,4:(3+NClass))//cs matriz(3,1:NClass)=Value(18,4:(3+NClass))//illiq matriz(4,1:NClass)=(-1)*Aineq(1,1:NClass)//retorno matriz(5,1:NClass)=Value(17,4:(3+NClass))//ci fim=extremo(matriz,illiqmax,'d',NClass) //fronteira eficiente - min c.'x tq Aeq*x=beq and Ax<=b and lb<=x<=ub incr=(fim-ini)/NPontos avgret=ini+0.000000000001 M=[] while avgret <= fim bineq(1)=-(avgret-0.000000000001) [xoti,cvar,ehsol]= karmarkar(Aeq.',beq,C, [],[],[],[],[Aineq;ALim],[bineq;bLim]) if ehsol==1 then M=[M;[cvar, (-1)*Aineq(1,1:NClass)*xoti(1:NClass), xoti(1:NClass).']] end avgret=avgret+incr end </pre>
--	---

A.4 SOLUÇÃO DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA ESTOCÁSTICA

<pre> <i>//Numero de classes de ativos</i> NClass=Value(11,3) <i>//Monta matriz covariância e vetor de retornos</i> for i=1:NClass R(i)=Value(15,3+i) for j=1:NClass A(i,j)=Value(i+60,j+3) A_CH(i,j)=Value(i+41,j+3) end end <i>//Choleskey Decompose</i> LTM=choleskey(A_CH,NClass) b(2)=1 ; b(3)=illiqmax ; me=2 <i>//calculo ponto de min vol</i> [x0oti,iact,iter,f]=qpsolve(A,p,C(2:3,:),b(2:3),ci,cs,me-1) <i>//estatisticas para cortes nas fronteiras</i> minvol=0.0 for j=1:NClass for i=1:NClass minvol = minvol + (x0oti(j)*x0oti(i)*A(i,j)) end end maxvol=0.0 for j=1:NClass if A(j,j)>maxvol then maxvol=A(j,j) end end lmax=Value(3,3) ; tamanho=Value(7,3) concent=Value(6,3) ; maxvol=maxvol^0.5 minvol=minvol^0.5 lmed=round((lmax+1)*concent) medvol=(maxvol-minvol)*tamanho intervalo1=(medvol-minvol)/lmed intervalo2=(maxvol-medvol)/(lmax+1-lmed) <i>//definição de tamanho dos diferentes intervalos</i> for i=1:lmed LinhaCorteX(i)= ((i-1)*intervalo1)+minvol end for i=lmed:(lmax+1) LinhaCorteX(i)= ((i-lmed)*intervalo2)+medvol end LinhaCorteX=LinhaCorteX.^2.0 maxvol=maxvol^2.0 ; minvol=minvol^2.0 </pre>	<pre> for h=1:Value(10,3) ini=0.0 ; fim=0.0 while (fim-ini)< 0.00000001 <i>//Geracao da distribuicao para cada curva</i> for i=1:NClass z(i)=rand()end for i=1:NClass aux=0.0 for j=1:NClass aux = aux + LTM(i,j)*z(j) end aux=aux+R(i) ; R_der(i)=aux end for i=1:NClass C(1,i)=R_der(i) end <i>//Definicao de Ini e Fim</i> ini=0.0 for j=1:NClass ini = ini + (x0oti(j)*R_der(j)) end matriz=[R_der.';cs.';Mlliq.';R_der.';ci.'] fim=extremo(matriz,illiqmax,'d',NClass) incr=(fim-ini)/(Value(9,3)) avgret=ini+0.000000000001 end <i>//Solucao markowitz</i> while avgret <= fim b(1)=avgret-0.000000000001 [x0,iact,iter,f]=qpsolve(A,p,C,b,ci,cs,me) retorno=0.0 ; retorno_exp=0.0 ; vol=0.0 for i=1:NClass retorno = retorno + (x0(i)*R_der(i)) retorno_exp = retorno_exp + (x0(i)^2*R(i)) for j=1:NClass vol = vol + (x0(i)*x0(j)*A(i,j)) end end M=[M;[retorno_exp;retorno;vol;x0].'] avgret=avgret+incr end for i=1:(lmax+1) pl=LinhaCorteX(i) [pval,pindx]=min(abs(M(:,3)-pl)) NR(:,i,h)=M(pindx,1:(NClass+3)) end CURVAS=[CURVAS;M] ; M=[] end </pre>
--	---

A.5 TRATAMENTO ESTATÍSTICO PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA ESTOCÁSTICA

<pre> lim_inf=round([(h+1)*(1-conf)*0.5)+1 lim_sup=round([(h+1)*(1+conf)*0.5)-1 for j=1:(lmax+1) //vol da linha de corte j //VOL_CORTE(j)=(((maxvol-minvol)*(j-1)/lmax) + minvol)^0.5 for i=1:(NClass+3) for k=1:Value(10,3) ND(i+1,k)=NR(i,j,k) end end //calculos para cada linha for i=1:(NClass+3) AVG_WGT_ALL(j,i)=mean(ND(i+1,:)) end //calculo de C=sum dW1*dW2*Cov1,2 for k=1:Value(10,3) ND(1,k)=0.0 for i=5:(NClass+4) for ni=5:(NClass+4) ND(1,k)=ND(1,k)+(ND(i,k)-AVG_WGT_ALL(j,i- 1))*(ND(ni,k)-AVG_WGT_ALL(j,ni-1))*A(i-4,ni-4) end end end // decrescente em função de C ND=gsort(ND,'lc','d') //calculo avg, top, bottom for i=1:(NClass+4) AVG_WGT(j,i)=mean(ND(i,lim_inf:lim_sup)) Pavg= DadoValorRetornaPercentil(AVG_WGT(j,i),ND(i,lim_inf:lim_ sup)) if Pavg<pctl then TOP_PERC(j,i)=AVG_WGT(j,i) else TOP_PERC(j,i)=DadoPercentilRetornaValor(Pavg- (pctl*0.5),ND(i,lim_inf:lim_sup)) end if Pavg>(1-pctl) then BOT_PERC(j,i)=AVG_WGT(j,i) else BOT_PERC(j,i)=DadoPercentilRetornaValor(Pavg+(pctl*0.5), ND(i,lim_inf:lim_sup)) end end end </pre>	<pre> for k=1:(lmax+1) VOL_PORT_MEDIO(k)=0.0 for i=1:NClass for j=1:NClass VOL_PORT_MEDIO(k) = VOL_PORT_MEDIO(k) + (A(i,j)*AVG_WGT(k,i+4)*AVG_WGT(k,j+4)) end end VOL_PORT_MEDIO(k)=VOL_PORT_MEDIO(k)^0.5 end VOL_CORTE=LinhaCorteX^0.5 AVG_WGT(:,4)=VOL_PORT_MEDIO TOP_PERC(:,4)=TOP_PERC(:,4).^0.5 BOT_PERC(:,4)=BOT_PERC(:,4).^0.5 CURVAS(:,3)=CURVAS(:,3).^0.5 </pre>
---	---

A.6 SOLUÇÃO PROGRAMAÇÃO ROBUSTA LMI

<pre> global matF global Aport global Rder global Eret global Rfree function [LME, LMI, OBJ]=evalfunct(XLIST) [alpha,W]=XLIST(:) OBJ=alpha LME=[] dim=size(W)(1,1) F=matF(:,1) for i=1:dim F=F+W(i)*matF(:,i+1) end H(1,1)=alpha H(1,2:(1+dim))=W.*Aport H(2:(1+dim),1)=Aport*W H(2:(1+dim),2:(1+dim))=Aport LMI=list(F,H) dim2=size(Rder)(1,1) for i=1:dim2 LMI(i+2)=Rder(i,:)*W- (ones(1,dim)*W)*Rfree-Eret+Rfree end endfunction //Inputs do modelo illiqmax=Value(3,3)+0.000000000001 NPontos=Value(4,3) NClass=Value(5,3) Rfree=Value(6,3) NVar=Value(7,3) Aport(1:NClass,1:NClass)=Value(58:(57+NClass),4: :(3+NClass)) Ach(1:NClass,1:NClass)=Value(39:(38+NClass),4:(3+NClass)) R=Value(12,4:(3+NClass)).' illiq=Value(18,4:(3+NClass)).' </pre>	<pre> <i>//Matrizes variáveis globais</i> matF=zeros(2+NClass,2+NClass,1+NClass) for i=1:NClass matF(i,i,i+1)=1.0 end matF(1+NClass,1+NClass,1)=illiqmax matF(2+NClass,2+NClass,1)=1 matF(1+NClass,1+NClass,2:(1+NClass))=-illiq matF(2+NClass,2+NClass,2:(1+NClass))=- ones(NClass,1) <i>//geração de conjuntos de retornos equiprováveis</i> LTM=choleskey(Ach,NClass) Rder=retornos(NClass,NVar,LTM,R) <i>//ponto de mínimo retorno</i> ini=Rfree fim=0.085 <i>//fronteira eficiente</i> incr=(fim-ini)/NPontos avgret=ini+0.000000000001 M=[] X0=list(max(Aport),(1/NClass)*ones(NClass,1)) while avgret <= fim Eret=avgret XLIST=lmisolver(X0,evalfunct) XLIST=XLIST(2) M=[M;XLIST.'XLIST.*R,(XLIST.*Aport*XLIST)^0. 5] avgret=avgret+incr end </pre>
---	---

APÊNDICE B

Neste capítulo são expostos alguns desenvolvimentos complementares àqueles apresentados no texto.

B.1 ESTIMADOR COERENTE

Um estimador considerado coerente é aquele em que a probabilidade do valor absoluto de o seu desvio em relação ao valor real ser menor que um valor muito pequeno ($\delta > 0$) tende a 1 quando o tamanho da amostra tende a infinito.

$$P(|\hat{\alpha} - \alpha| < \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Onde,

- $P(X)$ é a probabilidade de ocorrência do evento X ;
- α é o valor que se pretende estimar;
- $\hat{\alpha}$ é um estimador coerente de α ;
- δ é um escalar positivo muito pequeno;
- n é o tamanho da amostra.

B.2 CONVEXIDADE DA FUNÇÃO OBJETIVO

Uma forma de verificar que a função objetivo $f(\mathbf{w}) = \sigma_p(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{w}$ é convexa é através do cálculo da matriz Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{w})$.

$$\nabla^2 f(\bar{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{nj} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

Segundo Silva (2005), ao respeitar as três condições seguintes, conclui-se que C é conjunto convexo.

Ora, se vale que (Silva, 2005):

- (1) f contínua definida em $C \in R^n$, $f: C \rightarrow R$
- (2) $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{w}}) \geq 0$
- (3) todos os autovalores da matriz Hessiana são maiores ou iguais a zero

B.3 CONDIÇÕES DE KKT

Para verificar se a solução do problema de otimização linear quadrático é o mínimo global, pode-se utilizar as condições de KKT (Silva, 2005):

- (1) Factibilidade: $g_i(x^*) - b_i$ é factível para as restrições de igualdade e desigualdade
- (2) Sem direção de maior aproximação da função objetivo do mínimo em que a solução continue factível: $\nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x^*) = 0$ para as restrições de igualdade e desigualdade
- (3) Folga Complementar: $\lambda_i(g_i(x^*) - b_i) = 0$ para todo i de restrições de desigualdade
- (4) $\lambda_i \geq 0$ para todo i de restrições de desigualdade

Onde,

- g são as restrições;
- b é o vetor de termos independentes;
- $x^* \in \mathbb{R}^N$ é solução ótima.

B.4 GERAÇÃO DE VALORES ALEATÓRIOS PARA DISTRIBUIÇÃO NORMAL MULTIVARIADA

Na resolução dos modelos, foi utilizada geração de valores aleatórios de taxa de retorno através de simulações de Monte Carlo. Estes valores devem respeitar a matriz de covariância e os parâmetros de uma distribuição normal $N(\mu, \sigma)$ do retorno histórico de cada investimento.

Primeiramente é necessário fazer o cálculo da matriz de covariância das taxas de retorno para o intervalo de tempo que se pretende otimizar. Note que esta matriz é uma métrica de incerteza do parâmetro de taxa de retorno, diferentemente daquela utilizada como métrica de risco, que representa a variância na unidade mínima de tempo considerada.

A seguir é necessário fazer a decomposição desta matriz de covariância da incerteza, tal que ela possa ser escrita unicamente como o produto de uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal por sua transposta.

$$\sigma_{ch}^2 = \mathbf{G}\mathbf{G}'$$

Onde,

- $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal;
- $\sigma_{ch}^2 \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ é a matriz de covariância das taxas de retorno no intervalo de tempo considerado para a otimização;
- g_{ij} é elemento que compõe \mathbf{G} .

Como a matriz de covariância é simétrica e positiva definida, ou seja, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'$ e os menores principais têm determinante positivo (Critério Sylvestre), pode-se fazê-lo através do método Cholesky.

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2} \end{cases} \quad \begin{cases} g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}} \text{ para } i = 1, 2, \dots, N \\ g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}}{g_{jj}} \text{ para } j = 2, 3, \dots, i \end{cases}$$

Posteriormente a matriz decomposta é multiplicada por um vetor de variáveis aleatórias normais de média zero e desvio-padrão unitário. O resultado, então, é somado ao vetor de retorno médio das estratégias de investimento. Dessa forma, se obtém, para cada vetor gerado aleatoriamente, um valor de simulação.

$$\mathbf{R}_{der} = \mathbf{Gz} + \mathbf{r}$$

Onde,

- $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de valores aleatórios normais $N(1,0)$;
- $\mathbf{R}_{der} \in \mathbb{R}^N$ é um vetor que faz parte do conjunto gerado para a simulação.

B.5 LINEARIZAÇÃO UTILIZANDO O COMPLEMENTO DE SCHUR

Pretende-se linearizar a restrição utilizando o complemento de Schur.

$$\mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \mathbf{w} \leq \alpha \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

Para isso pode-se reescrever a restrição

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \mathbf{w} &= \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \boldsymbol{\sigma}^{(j)-1} \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \mathbf{w} \leq \alpha \\ \boldsymbol{\sigma}^{(j)} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

e fazer uso da seguinte equivalência.

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0 \text{ } Q(x) \text{ e } R(x) \text{ simétricas} \Leftrightarrow \begin{array}{c} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0 \end{array}$$

Note que se for considerado que

$$Q(x) = \alpha, S(x) = \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \text{ e } R(x) = \boldsymbol{\sigma}^{(j)}$$

então a restrição é equivalente à formulação

$$\begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{w}' \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \mathbf{w} & \boldsymbol{\sigma}^{(j)} \end{bmatrix} \geq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

B.6 APLICAÇÃO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE PARA A SOLUÇÃO DO MODELO DE MARKOWITZ PARA UM CASO PARTICULAR

Dada a formulação do problema clássico de Markowitz, em que

$$\min_{\mathbf{w}} \sigma^2(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{w}$$

$$s.a. \quad \mathbf{w}'\mathbf{r} \geq rt_{min}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{w} \leq \mathbf{b},$$

pode-se observar que no caso particular de limitação das restrições a uma única igualdade, ou seja,

$$se \mathbf{A}\mathbf{w} \leq \mathbf{b} \text{ equivale a } \mathbf{A}_e\mathbf{w} = b_e,$$

é possível transformar o problema em um sistema de equações lineares através de multiplicadores de Lagrange.

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma}\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}'\mathbf{r} - rt_{min}) - \mu(\mathbf{A}_e\mathbf{w} - b_e)$$

Onde,

- $\mathbf{A}_e \in \mathbb{R}^N$ e $b_e \in \mathbb{R}$ representam a restrição de igualdade, tipicamente $\mathbf{A}_e = [1 \quad \dots \quad 1]$ e $b_e = 1$;

- λ e μ são escalares que se tornam incógnitas no sistema.

Considerando, então, $\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0$ para cada uma das estratégias, o problema pode ser

resolvido para o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} \mathbf{w}'\boldsymbol{\sigma} - 2\lambda\mathbf{r} - 2\mu = 0 \\ \mathbf{w}'\mathbf{r} = rt_{min} \\ \mathbf{A}_e\mathbf{w} = b_e \end{cases}$$

B.7 BREVE DESCRIÇÃO DAS CLASSES DE ATIVOS CONSIDERADAS PELO ENDOWMENT DE YALE E NÃO ABORDADAS NO TEXTO

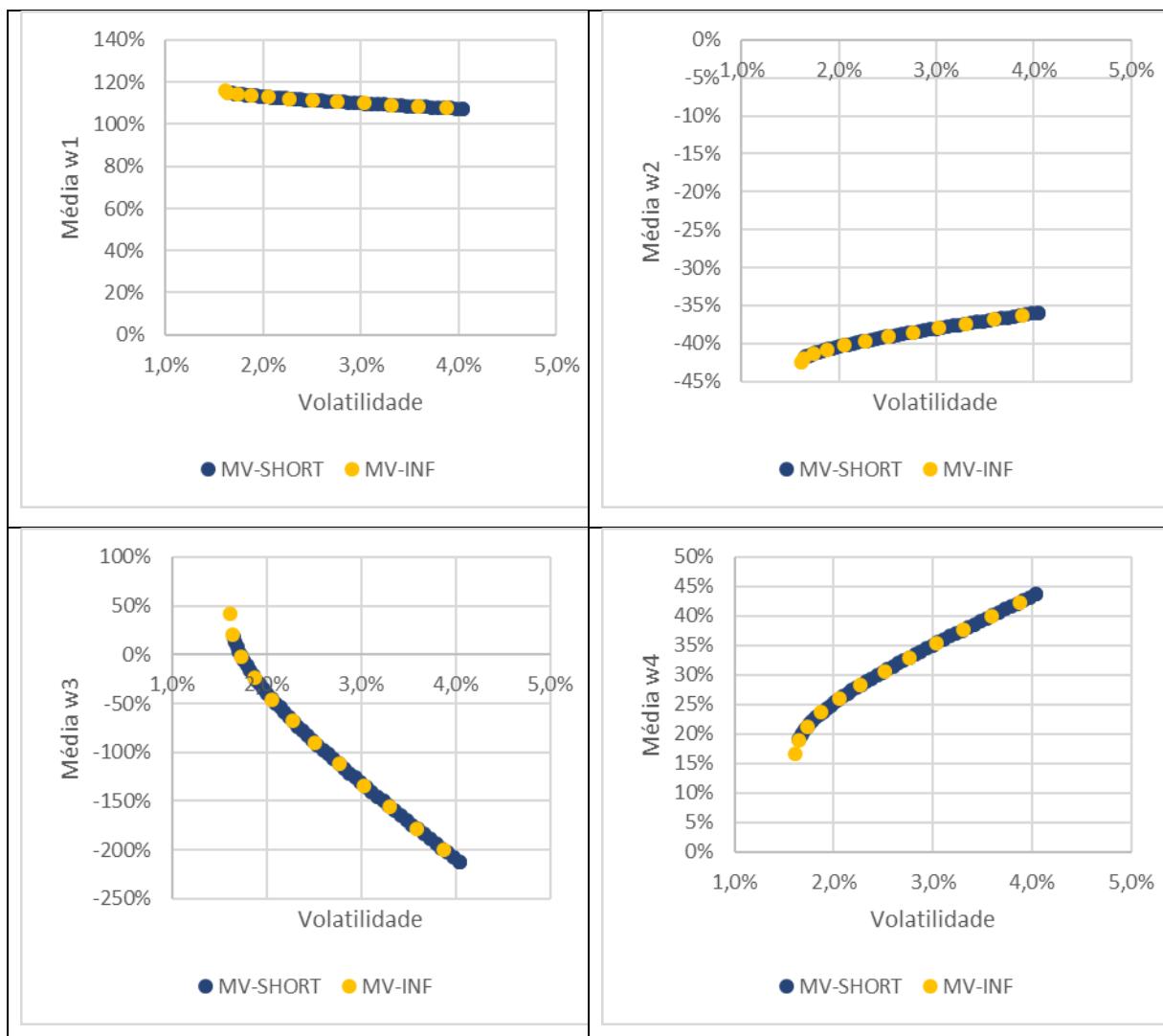
Dentre as classes de ativos consideradas pelo *endowment* de Yale e não consideradas neste trabalho de formatura estão *leveraged buyouts* (LBO), recursos naturais e *venture capital*. No caso de *leveraged buyouts*, trata-se de uma transação financeira que inclui crédito e ação, de forma que uma compra de crédito financia a aquisição do controle acionário de uma empresa. No caso de recursos naturais, trata-se do investimento em setores de petróleo e gás, agricultura e negócios florestais. No caso de *venture capital*, o investimento é análogo à compra de ações de empresas privadas, mas em estágios iniciais do desenvolvimento da empresa.

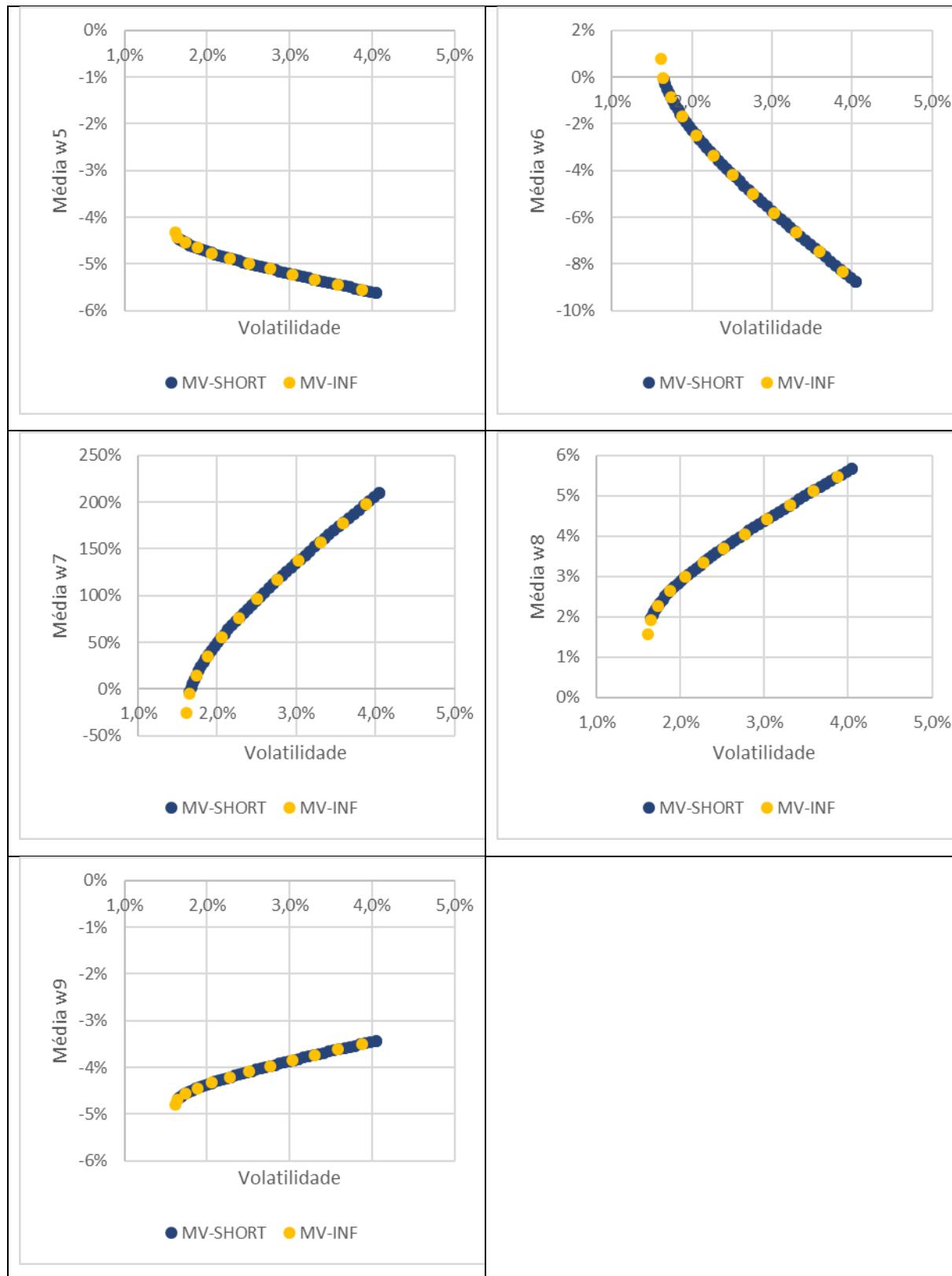
APÊNDICE C

Neste capítulo são expostos gráficos complementares aos apresentados nas seções principais.

C.1 VALIDAÇÃO MODELOS MARKOWITZ

Tabela 7 Verificação dos modelos de Markowitz



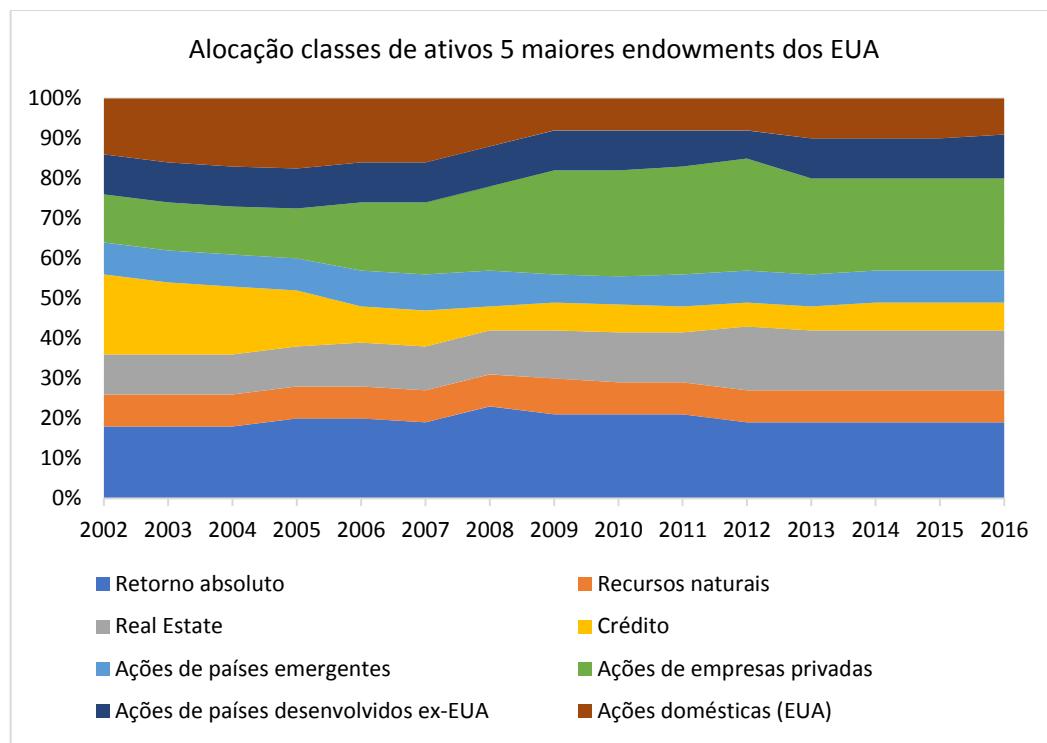


Fonte: Elaborado pela autora

C.2 ALOCAÇÃO DOS PORTFÓLIOS DE *ENDOWMENTS*

Alocação média dos cinco maiores *endowments* de instituições de ensino dos EUA, que inclui Harvard, Yale, University of Texas, Princeton e Stanford.

Gráfico 32 Alocações entre classes de ativos dos 5 maiores endowments dos EUA



Fonte: Elaborado pela autora a partir de dados do terminal Bloomberg